11 Cálculo de probabilidades

ACTIVIDADES INICIALES

11.I. Define por extensión o comprensión, según el caso, los siguientes conjuntos.

a) A = {divisores de 12}

b) B = {soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$}

c) C = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37…}

d) D = {5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38…}

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

b) $B = \{1, 2\}$

c) C = {números primos}

d) D = {términos de la progresión aritmética con $a_1 = 5$ y $d = 3$}

11.II. En el conjunto de los números naturales menores de 10 (excluido el 0) se definen los subconjuntos A = {números menores de 5} y B = {números primos menores de 10}. Determina los elementos que forman los siguientes conjuntos.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $\overline{A}$

d) $\overline{B}$

e) $\overline{A} \cap \overline{B}$

f) $\overline{A \cup B}$

g) $\overline{A} \cup \overline{B}$

h) $\overline{A \cap B}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

b) $A \cap B = \{2, 3\}$

c) $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

d) $\overline{B} = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

e) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{6, 8, 9\}$

f) $\overline{A \cup B} = \{6, 8, 9\}$

g) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

h) $\overline{A \cap B} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1. Decide si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas:

a) Medir distintas apotemas de un pentágono regular de perímetro 30 cm.

b) Predecir las personas que acuden a un centro comercial en un día concreto.

c) Tiempo que hará el ganador de una maratón.

d) Calcular el coste de una llamada telefónica de 1 minuto de duración.

Aleatorios: b, c

Deterministas: a, d

11.2. Un experimento aleatorio consiste en extraer al azar una bola de una urna en la que hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y anotar el número de la bola que hemos extraído. ¿Cuál es el espacio muestral asociado a este experimento?

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

11.3. De una baraja española se han tomado las 12 figuras. Se considera el experimento aleatorio que consiste en extraer una carta de ese grupo de cartas. ¿Cuál es el espacio muestral asociado a este experimento?

$E = \{S_O, S_C, S_E, S_B, C_O, C_C, C_E, C_B, R_O, R_C, R_E, R_B\}$

11.4. De una baraja española extraemos una carta. Obtén los elementos que forman los siguientes sucesos.

a) Extraer una carta del palo de bastos.

b) Extraer una figura de oros.

c) Extraer un 5 o una carta del palo de copas.

d) Extraer un as.

e) ¿Cuántos elementos tiene el espacio de sucesos de este experimento?

a) "Sacar palo de bastos" = $\{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B, S_B, C_B, R_B\}$

b) "Extraer figura de oros" = $\{S_O, C_O, R_O\}$

c)"Extraer un 5 o un palo de copas" = $\{5_O, 5_C, 5_E, 5_B, 1_C, 2_C, 3_C, 4_C, 6_C, 7_C, S_C, C_C, R_C\}$

d) "Extraer un as" = $\{1_O, 1_C, 1_E, 1_B\}$

e) Como el espacio muestral tiene 40 puntos muestrales, el espacio de sucesos tiene 2^{40} elementos.

11.5. Se tiene una urna con una bola blanca, otra roja y otra verde. Se van extrayendo bolas de la urna hasta que aparece la bola verde.

a) Determina el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) Obtén los elementos del suceso "no aparecer la bola verde hasta la tercera extracción".

c)Obtén los elementos del suceso "aparece bola verde en la segunda extracción".

a) $E = \{(V), (B, V), (R, V), (B, R, V), (R, B, V)\}$

b) $E = \{(B, R, V), (R, B, V)\}$

c) $E = \{(B, V), (R, V)\}$

11.6. Se lanza un dado cúbico con sus caras numeradas del 1 al 6 y se observa la puntuación de su cara superior. Se consideran los sucesos *A* = "salir un número par" y *B* = "salir un múltiplo de 3":

a) Obtén los sucesos A^C, $A \cup B$ y $A \cap B$.
b) ¿Forman *A* y *B* un sistema completo de sucesos?

a) $A^c = \{1, 3, 5\}$ $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ $A \cap B = \{6\}$

b) Como $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \neq E$ y $A \cap B = \{6\} \neq 0$, se concluye que *A* y *B* no forman un sistema completo de sucesos.

11.7. Del experimento consistente en extraer una carta de una baraja española se consideran los siguientes sucesos:

***A* = "extraer un rey"**

***B* = "extraer un oro"**

***C* = "extraer un 5 o un 6"**

Indica si hay alguna pareja de sucesos incompatibles.

$A \cap B = \{R_O\}$

$A \cap C = \varnothing$

$B \cap C = \{5_O, 6_O\}$

La única pareja de sucesos incompatibles es la formada por *A* y *C*.

11.8. En la tabla se recoge el número de veces que ha ocurrido el suceso *I* = "obtener impar" al lanzar un dado numerado del 1 al 6 un número creciente de veces. Estima un valor para la probabilidad de *I* y razona si el dado está equilibrado.

n	10	50	100	500	1000	5000	10 000
I	4	21	38	199	402	2000	3998

Las frecuencias relativas correspondientes son:

$h_{10}(I) = \frac{4}{10} = 0{,}4$ $\quad h_{100}(I) = \frac{38}{100} = 0{,}38$ $\quad h_{1000}(I) = \frac{402}{1000} = 0{,}402$ $\quad h_{10\,000}(I) = \frac{3998}{10000} = 0{,}3998$

$h_{50}(I) = \frac{21}{50} = 0{,}42$ $\quad h_{500}(I) = \frac{199}{500} = 0{,}398$ $\quad h_{5000}(I) = \frac{2000}{5000} = 0{,}4$

Parece que $P(I) = 0{,}4$. Por tanto, el dado no está equilibrado.

11.9. Se elige al azar una ficha de dominó.

a) Obtén la probabilidad de haber elegido la blanca doble.

b) Obtén la probabilidad de haber elegido una ficha doble.

c) Obtén la probabilidad de que los puntos de la ficha sumen 4.

(Se recuerda que el juego del dominó está formado por 28 fichas.)

a) A = "haber elegido una blanca doble" = {(0, 0)} $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{28}$

b) B = "haber elegido una ficha doble" = {(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)} $\Rightarrow P(B) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

c) C = "la puntuación suma 4" = {(0, 4), (1, 3), (2, 2)} $\Rightarrow P(C) = \frac{3}{28}$

11.10. Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

***A* = "obtener tres caras" *B* = "obtener dos caras y una cruz" C = "obtener una cara y dos cruces"**

$A = \{(CCC)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{8}$

$B = \{(CCX), (CXC), (XCC)\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$

$C = \{(CXX), (XCX), (XXC)\} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8}$

11.11. Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Obtener suma igual a 3.

b) Obtener suma mayor que 9.

c) Obtener suma menor o igual que 5.

a) A = "obtener suma 3" = {(1, 2), (2, 1)} $\Rightarrow P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) B = "obtener suma mayor que 9" = {(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} $\Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) C = "obtener suma menor o igual que 5" = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

$\Rightarrow P(C) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

11.12. Dos personas escriben al azar una vocal, cada una en un papel.

a) Obtén la probabilidad de que ambas escriban la misma vocal.

b) ¿Cuál sería la probabilidad de que tres personas escribiesen, al azar, cada uno la misma vocal en un papel?

a) Casos posibles: $VR_{5,2} = 5^2 = 25$
Casos favorables: 5
$P(\text{misma vocal}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

b) Casos posibles: $VR_{5,3} = 5^3 = 125$
Casos favorables: 5
$P(\text{misma vocal}) = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$

11.13. Se lanza dos veces un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6. Calcula:

a) La probabilidad de obtener algún 6.

b) La probabilidad de no obtener ningún 6.

a) A = "obtener algún 6" = {(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)},

$P(A) = \frac{11}{36}$

b) B = "no obtener ningún 6" es el suceso contrario de $A \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

11.14. Sean *A*, *B* y *C* tres sucesos que forman un sistema completo de sucesos, y donde $P(A) = 0{,}1$, $P(\overline{B}) = 0{,}7$. Calcula $P(C)$.

Al formar los sucesos A, B y C un sistema completo de sucesos, $E = A \cup B \cup C$, y los sucesos son incompatibles dos a dos; por tanto:

$1 = P(E) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 \Rightarrow 1 = 0{,}1 + 0{,}3 + P(C) \Rightarrow P(C) = 0{,}6$

11.15. Se extrae una carta de una baraja española. Consideramos los siguientes sucesos:

***A* = "salir una figura", *B* = "salir un as", *C* = "salir una carta del palo de espadas"**

a) ¿Son *A* y *B* incompatibles? Calcula $P(A \cup B)$.

b) ¿Son *A* y *C* compatibles? Calcula $P(A \cup C)$.

a) Son incompatibles, ya que $A \cap B = \varnothing$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{12}{40} + \frac{4}{40} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

b) No, ya que $A \cap C = \{S_E, C_E, R_E\}$. $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{12}{40} + \frac{10}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$

11.16. Se lanza un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6, y se anota su puntuación. Se consideran los sucesos:

***A* = "salir un número par", *B* = "salir un número que es un divisor de 12"**

a) ¿Son *A* y *B* sucesos incompatibles?

b) Calcula la probabilidad de $A \cup B$.

a) $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \Rightarrow A \cap B = \{2, 4, 6\} \neq 0 \Rightarrow$ No son incompatibles.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

11.17. En un pueblo se somete a sus vecinos a votación sobre la instalación de una antena de telefonía. Los resultados vienen recogidos en la siguiente tabla:

	A: Varones	$\bar{A}$: Mujeres	
B: Sí	317	303	620
$\bar{B}$: No	223	314	537
	540	617	1157

Seleccionamos al azar un vecino. Halla $P(A)$, $P(A/B)$, $P(\bar{B})$ y $P(\bar{B}/A)$.

$P(A) = \frac{540}{1157} = 0{,}467$ $P(A/B) = \frac{317}{620} = 0{,}511$ $P(\bar{B}) = \frac{537}{1157} = 0{,}464$ $P(\bar{B}/A) = \frac{223}{540} = 0{,}413$

11.18. En un experimento aleatorio se sabe que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cup B) = 0{,}85$. Calcula:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A/B)$

c) $P(B/A)$

d) $P(A/(A \cap B))$

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}85 = 0{,}35$

b) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}35}{0{,}7} = 0{,}5$

c) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7$

d) $P(A/(A \cap B)) = \frac{P(A \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$

11.19. (PAU) El 60% de los alumnos de un centro aprobaron Filosofía, y el 70% aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es del 80%. Si Juan sabe que ha aprobado Filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas?

Sean los sucesos M = "aprobar Matemáticas" y F = "aprobar Filosofía".

Del enunciado se deduce: $P(M) = 0{,}7$ $P(F) = 0{,}6$ $P(F/M) = 0{,}8$

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \cdot P(F/M)}{P(F)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}6} = 0{,}93$$

11.20. Se extraen dos cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que sean dos figuras (sota, caballo o rey) en los siguientes casos:

a) Con devolución.

b) Sin devolución.

Sean los sucesos A_1 = "sacar figura en la primera extracción" y A_2 = "sacar figura en la segunda extracción".

La probabilidad a calcular es la del suceso $A_1 \cap A_2$:

a) En este caso, los sucesos A_1 y A_2 son independientes; por tanto:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{9}{100}$$

b) Si la extracción es sin devolución, los sucesos A_1 y A_2 son dependientes; por tanto:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130}$$

11.21. Se lanza dos veces una moneda equilibrada. Se llama A al suceso "salir cara en el primer lanzamiento"; B, al suceso "salir cara en el segundo lanzamiento", y C, al suceso "en total aparecen una cara y una cruz". ¿Son A, B y C independientes dos a dos? ¿Son independientes los tres sucesos?

Primero se calculan las probabilidades de cada uno de los sucesos dados.

$A = \{CC, CX\}$ $\quad$ $B = \{CC, XC\}$ $\quad$ $C = \{CX, XC\}$

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{CC\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$

$A \cap C = \{CX\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$

$B \cap C = \{XC\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$

A, B y C son independientes dos a dos.

Como $A \cap B \cap C = \varnothing$, los sucesos no son independientes, ya que: $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

11.22. Se considera el experimento aleatorio compuesto consistente en lanzar dos veces un dado.

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento?

b) Calcula la probabilidad de obtener primero un 2 y luego un 5.

a) $VR_{6,2} = 6^2 = 36$

b) $P(2, 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

11.23. Se considera el experimento aleatorio compuesto consistente en extraer dos cartas de una baraja sin reemplazamiento.

a) ¿Cuántos elementos tiene este experimento? $\quad$ **b) Calcula la probabilidad de extraer dos reyes.**

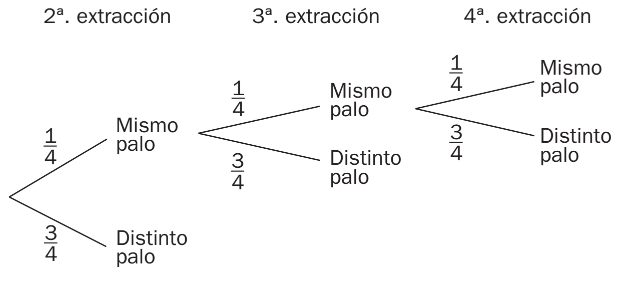
a) $V_{40,2} = 40 \cdot 39 = 1560$ elementos

b) $P(\text{dos reyes}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130} = 0{,}0077$

11.24. (PAU) Se extraen cuatro cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que las cuatro cartas sean del mismo palo en los siguientes casos:

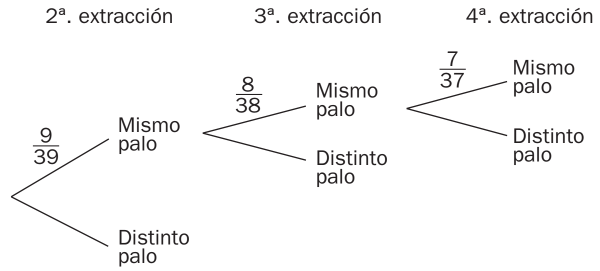
a) Con devolución de la carta a la baraja.
b) Sin devolución.

a)



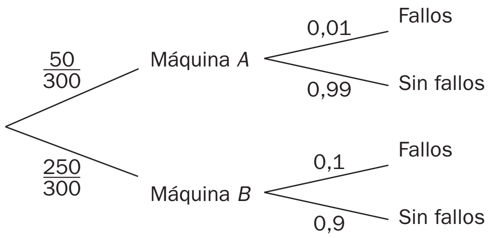
$P(\text{cuatro del mismo palo}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} = 0{,}016$

b)



$P(\text{cuatro del mismo palo}) = \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} \cdot \frac{7}{37} = \frac{504}{54\ 834} = 0{,}0092$

11.25. (PAU) Las máquinas *A* y *B* producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1% y del 10%, respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas que se han fabricado en una hora y elegimos una al azar. Halla la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina *B* y no sea defectuosa.



$$P(\text{máquina } B \text{ y válida}) = \frac{250}{300} \cdot 0{,}9 = 0{,}75$$

11.26. (PAU) La ciudad *A* tiene el triple de habitantes que la ciudad *B*, pero la proporción de universitarios en la ciudad *B* es el doble que en la *A*.

a) ¿En qué ciudad hay más universitarios?

b) Se elige un habitante al azar. Averigua la probabilidad de que sea universitario, sabiendo que la proporción de estos en la ciudad *A* es del 10%.

a) Habitantes de *B*: x

Habitantes de *A*: $3x$.

Proporción de universitarios de *A*: p

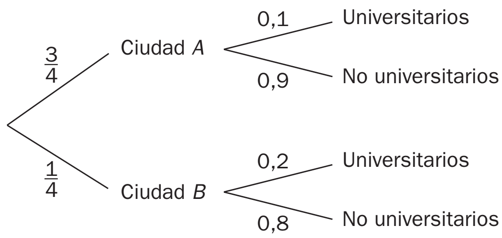
Proporción de universitarios de *B*: $2p$

Universitarios de *B*: $2px$

Universitarios de *A*: $3px$

Hay más universitarios en *A*.

b)



$$P(\text{ser universitario}) = \frac{3}{4} \cdot 0{,}1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2 = 0{,}125$$

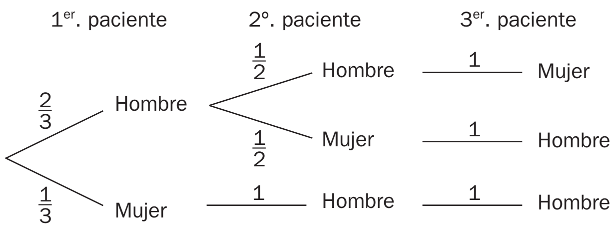
11.27. (PAU) Ana, Juan y Raúl están esperando para realizar una consulta médica y sortean el orden en que van a entrar.

a) Halla la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.

b) Determina si son independientes los sucesos:

S_1 = "la mujer entra antes que alguno de los hombres".

S_2 = "los dos hombres entran consecutivamente".



a) $P(MHH) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$

b) $P(S_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(S_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$S_1 \cap S_2 = (MHH)$

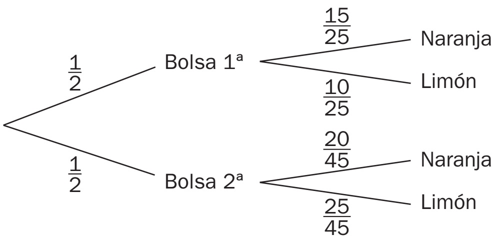
$P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{3} \neq P(S_1) \cdot P(S_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

No son independientes.

11.28. (PAU) Tenemos dos bolsas de caramelos. La primera contiene 15 caramelos de naranja y 10 de limón, y la segunda, 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo.

a) Halla la probabilidad de que el caramelo sea de naranja.

b) Si el caramelo elegido es de limón, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la segunda bolsa?

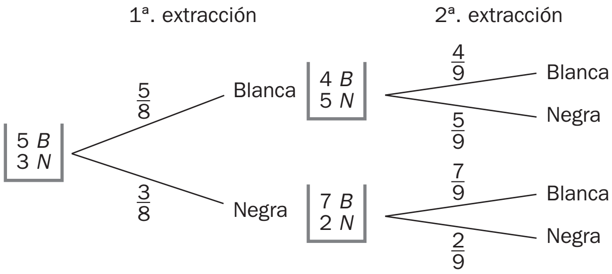


a) $P(\text{naranja}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{25}+\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{45}=\frac{47}{90}$

b) $P(2.^{\text{a}}\ \text{bolsa/limón}) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{45}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{45}+\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{25}}=\frac{25}{43}$

11.29. (PAU) Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar, se observa su color, se descarta y se introducen dos bolas del otro color en la urna. Luego se extrae otra bola al azar.

Sabiendo que la segunda bola extraída ha sido blanca, calcula la probabilidad de que la primera haya sido negra.



$P(N_1/B_2) = \dfrac{\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}}=\frac{21}{41}$

EJERCICIOS

Operaciones con sucesos

11.30. En el experimento que consiste en la extracción de una carta de una baraja española consideramos los siguientes sucesos:

***A* = "salir copas" *B* = "salir un caballo" *C* = "salir caballo de copas o tres de oros"**

Interpreta los siguientes sucesos.

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $B \cup C$

d) $A \cap B$

e) $A \cap C$

f) $B \cap C$

a) $A \cup B = \{1_C, 2_C, 3_C, 4_C, 5_C, 6_C, 7_C, S_C, C_C, R_C, C_O, C_E, C_B\}$

b) $A \cup C = \{1_C, 2_C, 3_C, 4_C, 5_C, 6_C, 7_C, S_C, C_C, R_C, 3_O\}$

c) $B \cup C = \{C_O, C_C, C_E, C_B, 3_O\}$

d) $A \cap B = \{C_C\}$

e) $A \cap C = \{C_C\}$

f) $B \cap C = \{C_C\}$

11.31. Se lanzan dos dados cúbicos distinguibles con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Forma los sucesos *A* = "la suma de sus puntuaciones es 10", *B* = "el producto de sus puntuaciones es un múltiplo de 3", *C* = "el producto de sus puntuaciones es un número primo", *D* = "la suma de sus puntuaciones es un múltiplo de 5", *E* = "la suma de sus puntuaciones es superior a 1", *F* = "la suma de sus puntuaciones es inferior a 2".

b) Forma los siguientes sucesos: $(A \cup B) \cap F$ y $(B \cap E) \cup F$.

a) $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$

$B = \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (5, 3), (5, 6), (6, 1),$
$(6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$C = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (5, 1)\}$

$D = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$

E es un suceso seguro y coincide con el espacio muestral.

$F = \varnothing$

b) $(A \cup B) \cap F = (A \cup B) \cap \varnothing = \varnothing$

$(B \cap E) \cup F = (B \cap E) \cup \varnothing = B \cap E = B$

Concepto de probabilidad

11.32. Se lanzan al aire tres monedas. Determina la probabilidad de que se obtengan al menos dos cruces.

Sea *A* = "obtener al menos dos caras" = {*XXC*, *XCX*, *CXX*, *XXX*}

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

11.33. Se extrae una carta de una baraja española. ¿Qué es más probable?

a) Que salga la sota de bastos o el rey de espadas.

b) Que salga un oro o una figura.

c) Que salga un oro o un no oro.

d) Que salga una figura o que no salga una figura.

a) *A* = "sacar sota de bastos"; *B* = "sacar rey de espadas"

$P(A) = \frac{1}{40}$; $P(B) = \frac{1}{40}$. Son igual de probables.

b) *A* = "sacar oro"; *B* = "sacar figura"

$P(A) = \frac{10}{40}$; $P(B) = \frac{12}{40}$. Es más probable sacar figura.

c) *A* = "sacar oro"; *B* = "sacar no oro"

$P(A) = \frac{10}{40}$; $P(B) = \frac{30}{40}$. Es más probable sacar no oro.

d) *A* = "sacar figura"; *B* = "sacar no figura"

$P(A) = \frac{12}{40}$; $P(B) = \frac{28}{40}$. Es más probable sacar no figura.

11.34. De los 39 alumnos de una clase, 16 escogieron como idioma el francés, y 27, el inglés. Nueve alumnos eligieron ambos idiomas y el resto no escogió ninguno de ellos. Si se elige al azar a un alumno de dicha clase, halla las siguientes probabilidades.

a) Escogió francés.

b) Escogió inglés.

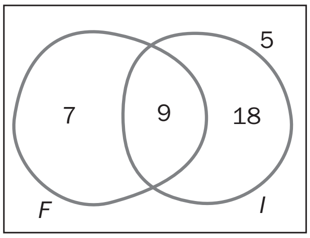
c) Escogió ambos idiomas.

d) Escogió francés o inglés.

e) Escogió francés, pero no inglés.

f) No escogió ni inglés ni francés.

Se consideran los sucesos F = "estudiar francés" e I = "estudiar inglés".



Se utiliza el diagrama de Venn para calcular el número de alumnos que estudian solo ingles y solo francés.

Como hay 9 alumnos que estudian los dos idiomas y 16 alumnos que estudian francés, se deduce que 7 estudian solo francés. De modo análogo se deduce que 18 alumnos estudian solo inglés.

El número de alumnos que estudian idiomas es 34, y, por tanto, habrá 5 alumnos que no estudian ningún idioma.

a) $P(F) = \dfrac{16}{39}$ c) $P(F \cap I) = \dfrac{9}{39}$ e) $P(F \cap \bar{I}) = \dfrac{7}{39}$

b) $P(I) = \dfrac{27}{39}$ d) $P(F \cup I) = \dfrac{34}{39}$ f) $P(\bar{F} \cap \bar{I}) = \dfrac{5}{39}$

11.35. Se elige al azar un número entero entre 0 y 999. Halla la probabilidad de que el número elegido:

a) No tenga ninguna cifra repetida.

b) Sea capicúa.

El espacio muestral de este experimento consta de 1000 elementos; por tanto:

a) El número de casos favorables a este suceso coincide con $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. De este modo,

P(el número no tenga ninguna cifra repetida) = $\dfrac{720}{1000}$

b) El número de capicúas de una cifra es 10, el de capicúas de dos cifras es 9, y de tres cifras hay $V_{10,9} = 90$ capicúas. En total tenemos 109 números capicúas entre 0 y 999; por tanto:

P(número capicúa) = $\dfrac{109}{1000}$

11.36. Los números 1, 2, 3…, *n* se alinean al azar.

a) Halla la probabilidad de que los números 2 y 3 aparezcan seguidos y en ese orden.

b) Halla la probabilidad de que los números 2 y 3 aparezcan juntos.

El espacio muestral de este experimento consta de $n!$ elementos.

a) Casos favorables: $(n-1) \cdot P_{n-2} \Rightarrow P$(2 y 3 seguidos y en ese orden) = $\dfrac{(n-1)P_{n-2}}{P_n} = \dfrac{1}{n}$

b) Casos favorables: $2 \cdot (n-1) \cdot P_{n-2} \Rightarrow P$(2 y 3 seguidos y en ese orden) = $\dfrac{2 \cdot (n-1)P_{n-2}}{P_n} = \dfrac{2}{n}$

Dependencia e independencia de sucesos

Probabilidad compuesta

11.37. (PAU) Se sabe que dado el suceso *A*, la probabilidad de que suceda *B* es de 0,3, es decir, que *P*(*B*/*A*) = 0,3. ¿Cuánto vale la probabilidad de que dado *A*, no ocurra *B*?

$P(B/A) = 0{,}3 \Rightarrow P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

11.38. (PAU) Calcula la probabilidad *P*(*A* ∪ *B*) y *P*(*A* ∩ *B*), sabiendo que *P*(*A* ∪ *B*) – *P*(*A* ∩ *B*) = 0,4, que *P*(*A*) = 0,6 y que *P*(*B*) = 0,8.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}4 + P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = 0{,}5 \\ P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9 \end{cases}$$

11.39. (PAU) Sean *A* y *B* dos sucesos con *P*(*A*) = 0,5, *P*(*B*) = 0,3 y *P*(*A* ∩ *B*) = 0,1. Calcula las siguientes probabilidades.

a) *P*(*A* ∪ *B*)

b) *P*(*A*/*B*)

c) *P*(*A*/*A* ∩ *B*)

d) *P*(*A*/*A* ∪ *B*)

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}7$

b) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

c) $P(A/A \cap B) = \dfrac{P(A \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$

d) $P(A/A \cup B) = \dfrac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0{,}5}{0{,}7} = \dfrac{5}{7}$

11.40. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A) = \dfrac{1}{3}$ y $P(B) = \dfrac{2}{5}$. Calcula, razonadamente, para qué valor de *P*(*A* ∪ *B*) los sucesos *A* y *B* son independientes.

A y *B* son independientes si *P*(*A*/*B*) = *P*(*A*).

$P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - P(A \cup B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{11}{15} - P(A \cup B) = \frac{2}{15} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{11}{15} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

11.41. Los ciudadanos de una localidad votaron Sí o No a una determinada propuesta que realizó su Ayuntamiento. Los resultados por porcentajes vienen reflejados en la tabla que mostramos a continuación. ¿Son los sucesos *A* = "ser varón" y *B* = "votar Sí" independientes?

	Varones	Mujeres	
SÍ	25%	40%	65%
NO	30%	5%	35%
	55%	45%	

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}25}{0{,}65} = 0{,}385.\ P(A) = 0{,}55.$

Como $P(A) \neq P(A/B)$, *A* y *B* no son independientes.

11.42. (PAU) De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos, y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, halla la probabilidad de que:

a) Ambos acierten. **c) Ninguno de los dos acierte.**

b) Uno acierte y el otro no. **D)Alguno acierte.**

a) T_1 = "el primer tirador acierta", T_2 = "el segundo tirador acierta". $P(T_1 \cap T_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) $P(T_1 \cap \overline{T_2}) + P(\overline{T_1} \cap T_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

c) $P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) $P(T_1 \cup T_2) = 1 - P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) = \frac{11}{12}$

11.43. (PAU) Una clase tiene 24 alumnos y todos ellos cursan inglés y matemáticas. La mitad aprueban inglés, 16 aprueban matemáticas, y 4 suspenden inglés y matemáticas.

a) Realiza una tabla de contingencia con los resultados de esta clase.

b) Calcula la probabilidad de que, al elegir un alumno de esta clase al azar, resulte que aprueba matemáticas y suspende inglés.

c) En esta clase, ¿son independientes los sucesos "aprobar inglés" y "aprobar matemáticas"?

a) Organizamos los datos en una tabla:

	Aprueba inglés	Suspende inglés	
Aprueba matemáticas	8	8	16
Suspende matemáticas	4	4	8
	12	12	24

b) $P(M \cap \bar{I}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

c) $P(I/M) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, $P(I) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. Sí son independientes.

11.44. (PAU) Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar y sin reemplazamiento cuatro huevos. Calcula la probabilidad de extraer:

a) Los cuatro huevos en buen estado. **b) De entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.**

a) P(los cuatro huevos en buen estado) = $\frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{33}$

b) P(1 huevo roto) = $\frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot 4 = \frac{16}{33}$

11.45. (PAU) En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras se pide calcular la probabilidad de obtener:

a) Tres unos.

b) Al menos un dos.

c) Tres números distintos.

d) Una suma de 4.

a) P(tres unos) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

b) P(al menos un dos) = 1 – P(ningún dos) = $1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{91}{216}$

c) P(tres números distintos) = $1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

d)Para obtener una suma de cuatro, hay que sacar dos unos y un dos.

P(suma cuatro) = $3\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$

11.46. (PAU). Sea *A* un suceso con 0 < *P*(*A*) < 1.

a) ¿Puede ser *A* independiente de su contrario, $\overline{A}$?

b) Sea *B* otro suceso tal que $A \supset B$. ¿Serán *A* y *B* independientes?

c) Sea *C* un suceso independiente de *A*. ¿Serán *A* y $\overline{C}$ independientes?

Justifica las respuestas.

a) *A* y $\overline{A}$ son independientes si $P\left(A \cap \overline{A}\right) = P(A) \cdot P\left(\overline{A}\right)$. Como $P\left(A \cap \overline{A}\right) = 0$, para que se cumpla la igualdad tiene que ocurrir:

- O bien que $P(A)$ = 0, que no puede ser por hipótesis.
- O bien que $P\left(\overline{A}\right) = 0$, que implicaría que $P(A)$ = 1, que no puede ser por hipótesis.

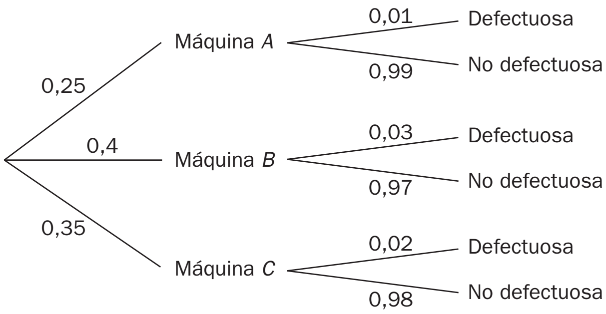
b) Como $A \supset B$, se tiene que $P(A \cap B) = P(B)$ y, por tanto, $P(B/A) = 1 = P(B)$, que no puede ser, ya que al estar *B* contenido en *A*, se verifica que $P(B) < P(A) < 1$.

c) $P\left(\overline{C} / A\right) = \dfrac{P\left(\overline{C} \cap A\right)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap C)}{P(A)} = 1 - \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = 1 - P(C / A) = 1 - P(C) = P\left(\overline{C}\right)$

Probabilidad total y teorema de Bayes

11.47. (PAU) Una fábrica dispone de tres máquinas *A*, *B* y *C* que fabrican arandelas. Se sabe que la máquina *A* produce un 1% de arandelas defectuosas; la *B*, un 3%, y la *C*, un 2%. La máquina *A* produce el 25% del total de las arandelas; la *B*, el 40%, y la *C*, el 35% restante. Al cabo de un día se toma una arandela al azar de la producción total.

Si la arandela elegida es defectuosa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina *A*.



$$P(A/D) = \frac{0,25 \cdot 0,01}{0,25 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot 0,02} = 0,1163$$

11.48. (PAU) En una caja hay 10 bombillas, 2 de las cuales son defectuosas. Con el fin de detectarlas, vamos probando una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento?

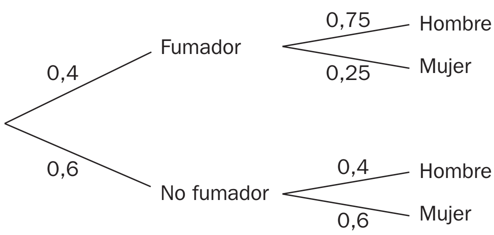
$$P\left(\overline{D}DD\right) + P\left(D\overline{D}D\right) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{45}$$

11.49. (PAU) Un médico ha observado que el 40% de sus pacientes fuma, y de estos, el 75% son hombres. Entre los que no fuman, el 60% son mujeres. Calcula la probabilidad de que:

a) Un paciente no fumador sea hombre.

b) Un paciente sea hombre fumador.

c) Un paciente sea mujer.



a) *P*(hombre/no fumador) = 0,4

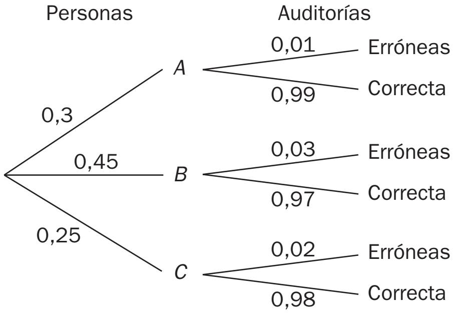
b) *P*(hombre y fumador) = 0,4 · 0,75 = 0,3

c) *P*(mujer) = 0,4 · 0,25 + 0,6 · 0,6 = 0,46

11.50. (PAU) En una empresa de auditorías se ha contratado a tres personas para inspeccionar a las empresas bancarias realizando las correspondientes auditorías. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30%; la segunda, el 45%, y la tercera, el 25% restante. Se ha comprobado que el 1% de las inspecciones que realiza la primera persona son erróneas, la segunda persona comete un 3% de errores, y la tercera, un 2%.

a) Halla la probabilidad de realizar una auditoría correctamente.

b) Al elegir una inspección correcta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?



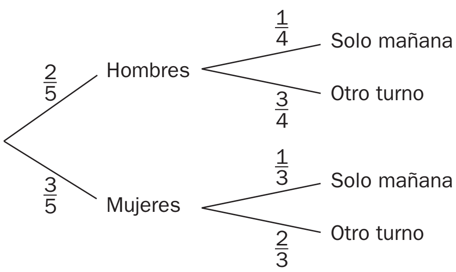
a) $P(\text{correcta}) = 0{,}3 \cdot 0{,}99 + 0{,}45 \cdot 0{,}97 + 0{,}25 \cdot 0{,}98 = 0{,}9785$

b) $P(B/\text{correcta}) = \dfrac{0{,}97 \cdot 0{,}45}{0{,}9785} = 0{,}4461$

11.51. (PAU) La plantilla de empleados de unos grandes almacenes está formada por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres solo trabajan en el turno de mañana. Elegido uno de los empleados al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre o solo trabaje en el turno de mañana?

b) Sabiendo que el empleado elegido no solo trabaja en el turno de mañana, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?



a) $P(\text{hombre} \cup \text{mañana}) = \dfrac{2}{5} + \left(\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{5}$

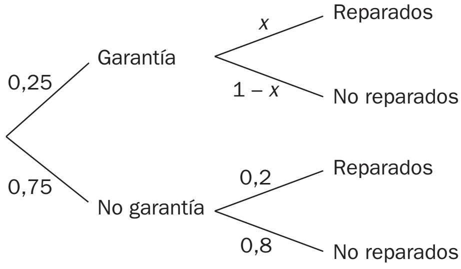
b) $P(\text{mujer/otro turno}) = \dfrac{\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{3}} = \dfrac{4}{7}$

11.52. (PAU) El 25% de los aparatos que llegan a un servicio técnico tienen garantía. Entre los que no tienen garantía, un 20% ya fueron reparados en otra ocasión. Finalmente, el 5% de los aparatos tienen garantía y además ya fueron reparados en otra ocasión.

a) ¿Qué porcentaje de los aparatos que llegan al servicio ya fueron reparados en otra ocasión?

b) ¿Qué porcentaje no fueron reparados en otra ocasión y además no tienen garantía?

c) Un aparato que acaba de llegar ya fue reparado en otra ocasión. ¿Qué probabilidad hay de que tenga garantía?



$P(\text{reparados} \cap \text{garantía}) = 0{,}05 \Rightarrow 0{,}05 = 0{,}25 \cdot x \Rightarrow x = 0{,}2$

a) $P(\text{reparados}) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \Rightarrow 20\%$

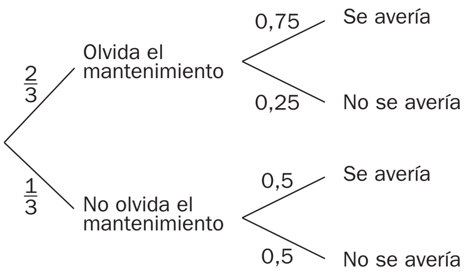
b) $P(\text{no reparados y no garantía}) = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6 \Rightarrow 60\%$

c) $P(\text{garantía/reparado}) = \dfrac{P(\text{garantía y reparado})}{P(\text{reparado})} = \dfrac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25$

11.53. (PAU) Juan es el responsable del aula de informática de una empresa y no se puede confiar en él, pues la probabilidad de que se olvide de hacer el mantenimiento de un ordenador en ausencia de su jefe es de $\frac{2}{3}$. Si Juan le hace el mantenimiento a un ordenador, este tiene la misma probabilidad de estropearse que de funcionar correctamente, pero si no le hace el mantenimiento, solo hay una probabilidad de 0,25 de que funcione correctamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ordenador funcione correctamente a la vuelta del jefe?

b) A su vuelta, el jefe se encuentra un ordenador averiado. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan no le hiciera el mantenimiento?

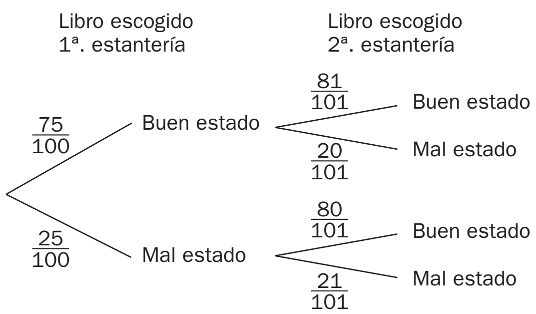


a) $P(\text{funciona}) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}25 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{se olvida/averiado}) = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}75}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

11.54. (PAU) En una biblioteca hay dos estanterías con 100 libros en cada una. En la primera hay 25 libros en mal estado, y en la segunda, 20. Un estudiante coge al azar un libro de la primera estantería y lo deja en la segunda.

¿Cuál es la probabilidad de que otro estudiante coja al azar un libro en buen estado de la segunda estantería?



$P(\text{buen estado}) = \frac{75}{100}\cdot\frac{81}{101}+\frac{25}{100}\cdot\frac{80}{101} = 0{,}7995$

PROBLEMAS

11.55. (PAU) Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}2$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = 0{,}7$.

a) Calcula $P(A \cap B)$ y razona si A y B son independientes.

b) Calcula $P(A \cup B)$.

a) Recordando las leyes de Morgan: $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 \neq P(A)\cdot P(B)$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}2 - 0{,}3 = 0{,}5$

11.56. (PAU) Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}9$.

a) Justifica si A y B son independientes. b) Calcula $P(A/\overline{B})$ y $P(B/\overline{A})$.

a) Para que A y B sean independientes, se tiene que verificar que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}9 = 0{,}7 + 0{,}6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}4$

Como $P(A \cap B) = 0{,}4 \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$, los sucesos son dependientes.

b) $P(A/\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$, $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0{,}2}{0{,}3} = \dfrac{2}{3}$

11.57. (PAU) En un experimento aleatorio, la probabilidad del suceso *A* es el doble que la del suceso *B*, y la suma de la probabilidad del suceso *A* y la del suceso contrario a *B* es 1,3. Se sabe además que la probabilidad del suceso intersección de *A* y *B* es de 0,18. Calcula la probabilidad de que:

a) Se verifique el suceso *A* o el *B*.

b) Se verifique el suceso contrario de *A* o el contrario de *B*.

c) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

$P(A) = 2x$ y $P(B) = x$. $P(A) + P(\overline{B}) = 1{,}3 \Rightarrow 2x + 1 - x = 1{,}3 \Rightarrow x = 0{,}3$. Por tanto, $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}3$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}18 = 0{,}72$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

c) $P(A \cap B) = 0{,}18$ y $P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$. Por tanto, *A* y *B* son independientes.

11.58. (PAU) Un dominó consta de 28 fichas, de las cuales 7 son dobles. Escogidas tres fichas al azar, calcula la probabilidad de que alguna sea doble si:

a) Se extraen las tres simultáneamente.

b) Se extraen de una en una con reemplazamiento.

a) $P(\text{alguna doble}) = 1 - P(\text{ninguna doble}) = 1 - \dfrac{21}{28} \cdot \dfrac{20}{27} \cdot \dfrac{19}{26} = \dfrac{139}{234} = 0{,}5940$

b) $P(\text{alguna doble}) = 1 - P(\text{ninguna doble}) = 1 - \left(\dfrac{21}{28}\right)^3 = \dfrac{37}{64} = 0{,}5781$

11.59. (PAU) Se hacen dos lanzamientos de un dado. Si en el primer lanzamiento sale un 2, ¿qué es más probable, que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?

Sean los sucesos *A* = "la suma de los resultados es par" y *B* = "en el primer lanzamiento se obtiene un 2".

Las probabilidades a comparar son $P(A/B)$ y $P(\overline{A}/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2};\ P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Son igual de probables ambos sucesos.}$$

11.60. (PAU) Se lanza un dado de seis caras numeradas del 1 al 6 dos veces consecutivas. Calcula la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1 sabiendo que la suma es 4.

Para que la suma sea 4, los únicos casos posibles son: {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}. Por tanto, la probabilidad pedida es de $\dfrac{1}{3}$.

11.61. (PAU) Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

$P(\text{al menos uno bien guardado}) = 1 - P(\text{ninguno en su envoltorio})$

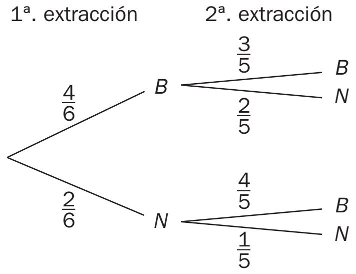
Los discos pueden guardarse de 3! = 6 formas posibles, de las cuales hay solo dos en las que ninguno está en su envoltorio. Por tanto:

$P(\text{al menos uno bien guardado}) = 1 - \dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{3}$

11.62. (PAU) De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?

b) Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?



a) $P(\text{dos blancas}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

b) $P(1.^{a}\ N/2.^{a}\ N) = \dfrac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

11.63. (PAU) El 45% del censo de una cierta ciudad vota al candidato *A*; el 35%, al candidato *B*, y el resto se abstiene. Se eligen al azar tres personas del censo. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Las tres personas votan al candidato *A*.

b) Dos personas votan al candidato *A*, y otra, al *B*.

c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

a) $P(\text{las tres personas votan al candidato } A) = 0{,}45 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}45 = 0{,}0911$

b) $P(\text{dos personas votan al candidato } A\text{, y otra, al } B) = 3(0{,}45 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}35) = 0{,}2126$

c) $P(\text{al menos uno se abstiene}) = 1 - P(\text{ninguno se abstiene}) = 1 - (0{,}8)^3 = 0{,}488$

11.64. (PAU) De una baraja española se extraen sucesivamente tres cartas al azar sin reemplazamiento. Determina la probabilidad de obtener:

a) Tres reyes.

b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.

c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

a) $P(\text{tres reyes}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = 0{,}0004$

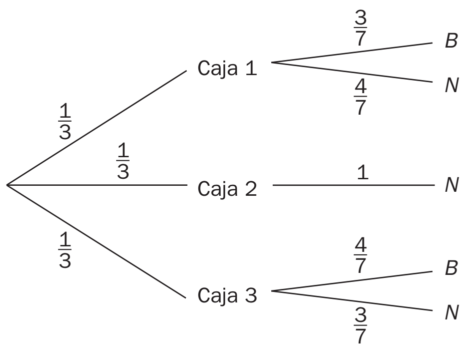
b) $P(1.^{a}\text{, figura; } 2.^{a}\text{, cinco; } 3.^{a}\text{, seis}) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = 0{,}0032$

c) $P(\text{un as, un tres y un seis}) = 6\left(\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38}\right) = 0{,}0065$

11.65. (PAU) Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene tres bolas blancas y cuatro negras; la segunda, cinco negras, y la tercera, cuatro blancas y tres negras.

a) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

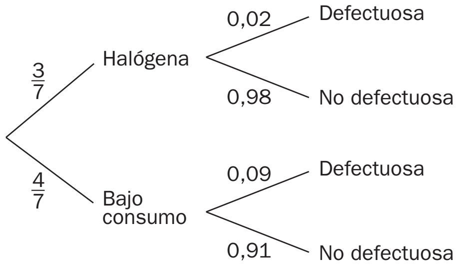


a) $P(N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$

b) $P(2.^{a}\text{ caja}/N) = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

11.66. (PAU) En una empresa se producen dos tipos de bombillas, halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es de 0,02, y de que lo sea una bombilla de bajo consumo es de 0,09.

Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que sea halógena?



$$P(\text{halógena/ no defectuosa}) = \frac{\frac{3}{7}\cdot 0{,}98}{\frac{3}{7}\cdot 0{,}98 + \frac{4}{7}\cdot 0{,}91} = 0{,}4668$$

11.67. (PAU) En una competición de tiro con arco, cada tirador dispone cómo máximo de tres intentos para hacer diana. En el momento en que lo consigue, deja de tirar y supera la prueba, y si no lo consigue en ninguno de los tres intentos, queda eliminado. Si la probabilidad de hacer blanco con cada flecha es de 0,8:

a) Calcula la probabilidad de que no quede eliminado.

b) Si sabemos que superó la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya conseguido en el segundo intento?

a) P(no quedar eliminado) = 1 – P(quedar eliminado) = 1 – $(0{,}2)^3$ = 0,992

b) P(acierto en el 2.º intento/no eliminado) = $\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{0{,}992}$ = 0,1613

11.68. (PAU) En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcula la probabilidad de que un jugador gane.

b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

a) P(gane) = $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$

b) P(2 caras/ganar) = $\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{24}}=\frac{3}{7}$

11.69. (PAU) Una fábrica produce un elemento mecánico ensamblando dos componentes *A* y *B*. Se sabe que la probabilidad de que el componente *A* sea defectuoso es de 0,001, y que la de que *B* no lo sea es de 0,997. Se elige al azar un elemento. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Solamente el componente *A* es defectuoso.

b) Ninguno de los componentes es defectuoso.

c) Ambos componentes son defectuosos.

d) Solamente uno de los componentes es defectuoso.

Sean los sucesos *A* = "componente *A* defectuoso" y *B* = "componente *B* defectuoso"

a) $P(A \cap \overline{B})$ = 0,001 · 0,997 = 0,000997

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 0,999 · 0,997 = 0,9960

c) $P(A \cap B)$ = 0,001 · 0,003 = 0,000003

d) P(solo un componente defectuoso) = $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$ = 0,001 · 0,997 + 0,999 · 0,003 = 0,003994

11.70. (PAU) Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad $\frac{3}{7}$ y una raya con probabilidad $\frac{4}{7}$. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un punto se reciba una raya con probabilidad $\frac{1}{4}$ y que cuando se envíe una raya se reciba un punto con probabilidad $\frac{1}{3}$.

a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que se haya enviado realmente una raya?

b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto se haya enviado raya-raya?

Sean los sucesos *ER* = "emite raya", *EP* = "emite punto", *RR* = "recibe raya" y *RP* = "recibe punto".

Las probabilidades que da el problema son $P(EP) = \frac{3}{7}$, $P(ER) = \frac{4}{7}$, $P(RR/EP) = \frac{1}{4}$ y $P(RP/ER) = \frac{1}{3}$.

a) $P(ER/RR) = \frac{P(ER \cap RR)}{P(RR)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7}} = \frac{32}{41} = 0{,}7805$

b) $[P(ER/RP)]^2 = \left[\frac{P(ER \cap RP)}{P(RP)}\right]^2 = \left[\frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7}}\right]^2 = \left(\frac{16}{43}\right)^2 = 0{,}1385$

11.71. (PAU) La ruleta de un casino consta de 40 casillas, numeradas del 1 al 40. Los números acabados en 1, 2, 3, 4 ó 5 son rojos, y el resto, negros. Puesta en marcha la ruleta, se consideran los sucesos siguientes:

***A* = "el resultado es un número de la primera decena".**

***B* = "el resultado es un número par".**

***C* = "el resultado es un número rojo".**

a) Halla la probabilidad *P*(*C* – *A*).

b) Halla la probabilidad de que el número sea de la primera decena, sabiendo que es rojo.

c) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? ¿Y los sucesos *A* y *C*? ¿Son independientes los tres sucesos?

a) $P(C - A) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

b) $P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{5}{40}}{\frac{20}{40}} = \frac{1}{4}$

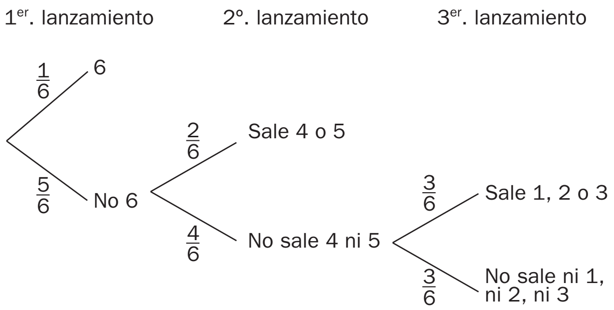
c) $P(A \cap B) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow$ Sí son independientes.

$P(A \cap C) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$, $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow$ Sí son independientes.

$P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$, $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \Rightarrow$ No son independientes.

11.72. (PAU) Tres amigos juegan con un dado de la siguiente forma. Cada uno lanza el dado a lo sumo una vez. Si el primero en lanzar obtiene un 6, gana la partida. Si no, lanza el segundo, y si este saca un 4 o un 5, gana la partida. Si no lo consigue, lanza el tercero, y si saca 1, 2 ó 3, gana la partida. Si no lo consigue, la partida acaba empatada. Halla la probabilidad que tiene de ganar cada jugador y la probabilidad que hay de que la partida quede empatada.



a) $P(\text{gana el 1.º}) = \frac{1}{6}$

b) $P(\text{gana el 2.º}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{18}$

c) $P(\text{gana el 3.º}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{18}$

d) $P(\text{empate}) = 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18}$

PROFUNDIZACIÓN

11.73. (PAU) De dos sucesos *A* y *B* se sabe que son independientes, que la probabilidad de que ocurra uno de ellos es $\frac{5}{6}$ y que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es $\frac{1}{3}$. Halla las probabilidades de *A* y *B*.

Como A y B son independientes $\Rightarrow P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Además, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{6} = P(A) + P(B) - \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{7}{6}$

Se trata de resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{3} \\ P(A) + P(B) = \frac{7}{6} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} P(A) = \frac{7}{6} - P(B) \\ \left(\frac{7}{6} - P(B)\right)\cdot P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B)^2 - \frac{7}{6}P(B) + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 6P(B)^2 - 7P(B) + 2 = 0 \end{array}$$

$P(B) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$ o bien $P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$

11.74. (PAU) Pere, Juan y ocho amigos más se sientan al azar en torno a una mesa circular. Calcula la probabilidad de que Juan y Pere estén sentados juntos.

El número de formas de sentarse es $PC_{10} = P_9 = 9! = 362\,880$.

Si Pere y Juan se sientan juntos, se les considera a los dos como un único elemento, por tanto habrá:

$2 \cdot PC_9 = 2 \cdot P_8 = 8! = 80\,640$ formas de sentarse.

$P(\text{estén juntos}) = \frac{80\,640}{362\,880} = \frac{2}{9}$

11.75. (PAU) Un dado está trucado de manera que son iguales las probabilidades de obtener 2, 4 ó 6. También son iguales las probabilidades de obtener 1, 3 ó 5. La probabilidad de obtener un 2 es el doble que la de sacar un 1.

Deduce razonablemente cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado dos veces se obtenga una suma de sus puntuaciones igual a 7.

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=P(3)=P(5)=x \\ P(2)=P(4)=P(6)=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

Los modos de obtener una suma de siete serán {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) y (6, 1)}.

$$P(\text{suma } 7) = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

11.76. (PAU) En un famoso concurso de televisión, al concursante se le da a elegir tres puertas. Detrás de una de ellas está el premio mayor, que es un coche, y detrás de las otras dos hay premios menores. Una vez que el concursante elige la puerta, el presentador, que sabe dónde está el premio, abre siempre una de las puertas donde hay un premio irrisorio. En ese momento, cuando solo quedan dos puertas, siempre pregunta al concursante si desea cambiar de puerta.

¿Crees que el concursante tendrá más posibilidades de ganar si cambia de puerta o si se queda con la que eligió inicialmente?

Inicialmente, la opción que ha elegido el concursante tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de tener el premio mayor.

Como el presentador siempre abre una puerta sin el premio mayor (esto siempre lo puede hacer), de dos puertas que quedan, la que eligió el concursante tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$, y la otra, de $\frac{2}{3}$ de tener el premio mayor. Por tanto, conviene cambiar.

11.77. Se tiene un cubo y se pintan al azar tres caras de color rojo y otras tres de color amarillo. Calcula la probabilidad de que las tres caras de color rojo tengan un vértice en común.

El número de formas de pintar el cubo con tres caras amarillas y tres rojas es $P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

El número de formas de pintar el cubo con tres caras amarillas y tres rojas, de modo que las tres caras de color rojo tengan un vértice en común (consecuentemente, las tres caras de color rojo también lo tendrán), coincide con el número de vértices del cubo, que es 8 $\Rightarrow P(\text{vértice en común}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

11.78. a) Halla la probabilidad de obtener al menos un seis doble en *n* tiradas de dos dados.

b) ¿Cuántas partidas habrá que jugar para que la probabilidad anterior sea $\frac{1}{2}$?

a) Sea A_i el suceso "sacar 6 doble en la tirada *i*-ésima".

La probabilidad pedida será:

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ldots \cap \overline{A}_n) =$

$= 1 - P(\overline{A}_1)\, P(\overline{A}_2)\, P(\overline{A}_3) \ldots P(\overline{A}_n)$, ya que los sucesos son independientes.

$= 1 - [P(\overline{A}_1)]^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$, ya que todos los sucesos tienen la misma probabilidad.

$P(\text{al menos un 6 doble en } n \text{ tiradas de dos dados}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$

b) $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = \left(\frac{36}{35}\right)^n$. Tomando logaritmos resulta: $\log 2 = n(\log 36 - \log 35) \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 25$ partidas

11.79. Demuestra la siguiente igualdad: $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

$P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) - P(A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

11.80. Sean A, B y C tal que $P(C) > 0$. Demuestra que $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$.

$$P(A \cup B/C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} =$$

$= P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$

11.81. De una urna que contiene 6 bolas blancas y n negras se extraen k bolas. Calcula la probabilidad de que sean r blancas:

a) Devolviendo la bola a la urna después de cada extracción.

b) Sin devolverla.

a) $P(r \text{ blancas}) = \binom{k}{r} \cdot \left(\frac{6}{n+6}\right)^r \cdot \left(\frac{n}{n+6}\right)^{k-r}$

b) Supondremos las bolas distinguibles.

Casos posibles: $C_{6,r} \cdot C_{n,k-r} \cdot P_k$

Casos favorables: $V_{n+6,k}$

$P(r \text{ blancas}) = \frac{C_{6,r} \cdot C_{n,k-r} \cdot P_k}{V_{n+6,k}}$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

11.1. Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}2$ y $P(A \cup B) = 0{,}5$, la probabilidad de que sucedan A y B es de:

A) 0,1 B) 0,3 C) 0,5 D) 0,6 E) Faltan datos para averiguarlo.

Sabiendo que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 + 02 - 0{,}5 = 0{,}1$.

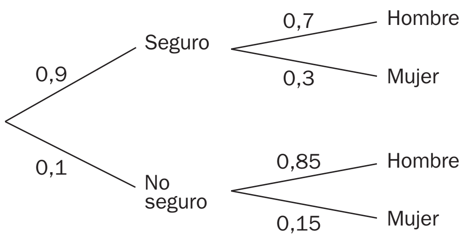
11.2. La probabilidad de que un atleta supere en el salto de longitud la distancia de 8,75 metros es de 0,3. Si realiza tres intentos, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 8,75 metros en los tres saltos?

A) 0,027 B) 0,09 C) 0,27 D) 0,5 E) 0,9

$P(\text{supere } 8{,}75 \text{ en tres intentos}) = (0{,}9)^3 = 0{,}027$

11.3. El 90% de los coches que circulan llevan el seguro obligatorio. De los coches asegurados, el 70% son conducidos por hombres, y de los coches no asegurados, el 85% son conducidos por hombres. Si elegimos un coche al azar y el conductor es una mujer, la probabilidad de que tenga seguro es de aproximadamente:

A) 0,75 B) 0,83 C) 0,87 D) 0,91 E) 0,95



$$P(\text{seguro / mujer}) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}3}{0{,}9 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}15} = 0{,}947$$

Sería la respuesta E.

11.4. De un experimento se sabe que $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(A/B) = 0{,}15$. La probabilidad del suceso $A \cup B$ es de:

A) 0,09 B) 0,45 C) 0,7 D) 0,76 E) 0,8

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = 0{,}6 \cdot 0{,}15 = 0{,}09$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}6 - 0{,}09 = 0{,}76$

11.5. Los sucesos *A* y *B* son independientes. Si *P*(*A*) = 0,8 y *P*(*B*) = 0,5, entonces $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ es:

A) 0,3 B) 0,4 C) 0,45 D) 0,6 E) 0,63

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}4$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

11.6. De los siguientes experimentos, di cuáles no son aleatorios.

A) Elegir al azar un ángulo de un triángulo equilátero, medirlo y anotar su resultado.

B) Escoger al azar una diagonal de un rombo de área 20 cm^2 y anotar su resultado.

C) Escoger al azar una diagonal de un cuadrado de área 5 cm^2 y anotar su resultado.

D) Medir al azar un radio de una circunferencia de área π cm^2 y anotar su resultado.

E) Medir al azar una cuerda de una circunferencia de área π cm^2 y anotar su resultado.

Son aleatorios B y E.

En A, todos los ángulos miden 60º; en C, las dos diagonales del cuadrado miden lo mismo, $\sqrt{10}$, y en D, todos los radios miden 1 cm.

11.7. Si *P*(*A*) es la probabilidad de obtener al menos una cara cuando lanzamos cuatro monedas, entonces:

A) El número de casos favorables es 4.

B) $P(A^c) = \frac{1}{8}$

C) $P(A^c) = \frac{1}{16}$

D) $P(A) > \frac{5}{6}$

E) $P(A) + P(A^c) < 1$.

Como $P(A) = \frac{15}{16}$, los únicos casos ciertos son C y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

11.8. Decide cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

A) Si *A* y *B* son dos sucesos incompatibles, entonces *P*(*A*) + *P*(*B*) = 1.

B) Si *A* y *B* son dos sucesos independientes, entonces son también incompatibles.

C) Si *A* y *B* son dos sucesos incompatibles, entonces son también independientes.

D) Si *A* es un suceso imposible, también es independiente con cualquier otro suceso.

E) Si *A* es un suceso seguro, también es independiente con cualquier otro suceso.

Son correctas D y E.

Si $P(A) = 0$, entonces $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ y $P(A) \cdot P(B) = 0$

Si $P(A) = 1$, entonces $P(A \cap B) = P(B)$ y $P(A) \cdot P(B) = P(B)$

Señala los datos innecesarios para contestar:

11.9. Los 250 alumnos matriculados en una academia de idiomas solo pueden estudiar uno de los dos idiomas impartidos: inglés o francés.

Para hallar la probabilidad de que apruebe un alumno elegido al azar:

a) En inglés hay matriculados 200 alumnos.

b) En francés hay matriculados 50 alumnos.

c) En inglés aprueba el 56%.

d) En francés suspende el 26%.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) Puede eliminarse el dato a o el dato b.

E. Si se conoce el número de alumnos matriculados en una de las asignaturas, se conoce también el número de alumnos matriculados en la otra, ya que el total de alumnos es un dato del enunciado y cada alumno solo puede estudiar una de las asignaturas.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

11.10. Para saber si dos sucesos, *A* y *B*, son independientes:

A) Basta con saber las probabilidades de *A* y *B*.

B) Basta con saber si son incompatibles.

C) Basta con saber las probabilidades de la unión y la intersección de los sucesos.

D) Basta con saber la probabilidad de A^c y la de $P(A/B)$.

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Si se conoce $P(A^c)$, se conoce $P(A)$ y , en este caso sólo se tiene que ver si coincide con $P(A/B)$. Luego la respuesta correcta es la D