

9 Integrales

ACTIVIDADES INICIALES

9.1. Encuentra la función que mide el área de las regiones limitadas por el eje horizontal y las rectas:

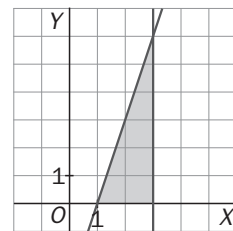
- a) $y = 3x - 3$; la recta vertical trazada por el punto de abscisa x con $x > 1$.
- b) $y = x$ si $x \leq 3$; $y = -x + 6$ si $x > 3$; la recta vertical trazada por el punto de abscisa x . Distingue entre $0 \leq x \leq 3$ y $3 < x \leq 6$.

En ambos casos, calcula también la derivada de las funciones áreas obtenidas.

- a) Se forma un triángulo de base $x - 1$ y altura $3x - 3$.

La función área es: $A(x) = \frac{(x-1)(3x-3)}{2}$

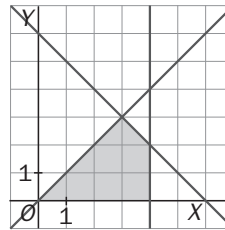
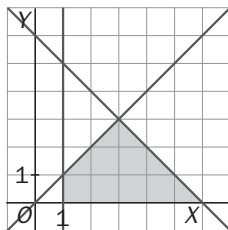
Y su derivada: $A'(x) = \frac{6x-6}{2} = 3x-3$



- b) En ambos casos, la figura que se forma es un triángulo de base 6 y altura 3 menos un triángulo.

Si $0 \leq x \leq 3$, el triángulo tiene base x y altura x .

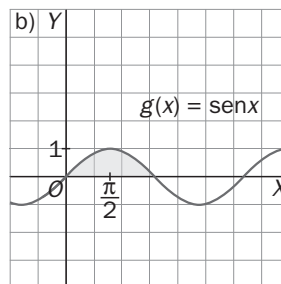
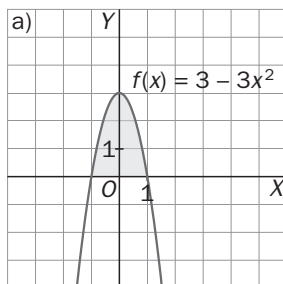
Si $3 < x \leq 6$, el triángulo tiene base $6 - x$ y altura $-x + 6$.



La función área es: $A(x) = \begin{cases} 9 - \frac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 3 \\ 9 - \frac{(6-x)^2}{2} & 3 < x \leq 6 \end{cases}$. Y su derivada: $A'(x) = \begin{cases} -x & 0 < x < 3 \\ 6 - x & 3 < x < 6 \end{cases}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

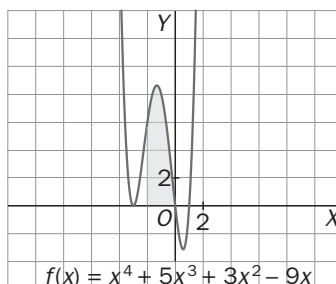
9.1. Calcula el área de las regiones sombreadas.



a) Si $f(x) = 3 - 3x^2$, entonces $F(x) = 3x - x^3$ cumple que $F'(x) = f(x)$ y el área de la zona sombreada es: $F(1) - F(-1) = (3 - 1) - (-3 + 1) = 4 u^2$.

b) Si $g(x) = \text{sen } x$, entonces $G(x) = -\text{cos } x$ cumple que $G'(x) = g(x)$ y el área sombreada es $G(\pi) - G(0) = -(-1) + 1 = 2 u^2$.

9.2. Halla el área del recinto sombreado.



Una primitiva de $f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x$ es $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{5x^4}{4} + x^3 - \frac{9x^2}{2}$.

El área sombreada es $F(0) - F(-2) = -\left(\frac{(-2)^5}{5} + \frac{5(-2)^4}{4} + (-2)^3 - \frac{9(-2)^2}{2}\right) = \frac{62}{5} u^2$.

9.3. Calcula el área de la zona limitada por la gráfica de $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Área = $G(2) - G(0)$ con $G'(x) = x^2$

Una primitiva de $G'(x)$ es $G(x) = \frac{1}{3} x^3$. El área pedida es: $G(2) - G(0) = \frac{8}{3} u^2$.

9.4. Calcula:

a) $\int_0^1 3x^2 dx$

b) $\int_0^{2\pi} \text{sen } x dx$

c) $\int_0^2 (x^2 - 1) dx$

a) $\int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1$

b) $\int_0^{2\pi} \text{sen } x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$

c) $\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

9.5. Escribe una función continua f para la que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

Como el intervalo es simétrico respecto del origen, cualquier función impar lo verifica, por ejemplo, $f(x) = x$.

9.6. Calcula $\int_{-1}^4 |3x| dx$.

Como $f(x) = |3x| = \begin{cases} -3x & -1 \leq x < 0 \\ 3x & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$,

$\int_{-1}^4 |3x| dx = \int_{-1}^0 |3x| dx + \int_0^4 |3x| dx = \int_{-1}^0 -3x dx + \int_0^4 3x dx = \left[-\frac{3}{2} x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{3}{2} x^2\right]_0^4 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot 4^2 = \frac{51}{2}$

9.7. Escribe una función f no constante en $[0, 2]$ y tal que $\int_0^2 f(x) dx = 2$.

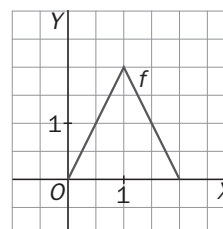
Hay que obtener una función $F(x)$ con $F(2) - F(0) = 2$.

$F(x) = x$ no sirve, pues $f(x) = F'(x) = 1$ es constante.

Probando con $F(x) = \frac{1}{2} x^2$ y, por tanto, $f(x) = x$.

Otra forma de resolverlo es dibujando un triángulo isósceles de base 2 y altura 2.

La función que lo define es $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - 2x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



9.8. Si $\int_0^1 f(x) dx = 1$, $\int_1^2 f(x) dx = 2$ y $\int_0^3 f(x) dx = 3$, calcula:

a) $\int_0^2 f(x) dx$

b) $\int_1^3 f(x) dx$

c) $\int_2^3 f(x) dx$

a) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 1 + 2 = 3$

b) $\int_1^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 3 - 1 = 2$

c) $\int_2^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \left(\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \right) = 3 - (1 + 2) = 0$

9.9. Si f es continua y $\int_0^1 f(x) dx = 2$, ¿cuánto vale $\int_0^1 g(t) dt$, siendo $g(t) = f(t) + 1$?

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 (f(t) + 1) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 1 dt = 2 + [t]_0^1 = 2 + 1 = 3$$

9.10. Si $\int_a^b f(x) dx = 1$, $\int_a^b g(x) dx = 2$, $\int_a^b h(x) dx = -3$, calcula, si tienes datos suficientes, el valor de algunas de estas integrales:

a) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$ b) $\int_a^b (2f(x) - 3g(x)) dx$ c) $\int_a^b (f(x) \cdot g(x)) dx$ d) $\int_a^b (f(x) - 2h(x)) dx$

a) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = 1 + 2 = 3$

b) $\int_a^b (2f(x) - 3g(x)) dx = 2 \int_a^b f(x) dx - 3 \int_a^b g(x) dx = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$

c) $\int_a^b (f(x) \cdot g(x)) dx$. No se tienen datos suficientes.

d) $\int_a^b (f(x) - 2h(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - 2 \int_a^b h(x) dx = 1 - 2 \cdot (-3) = 7$

9.11. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$.

Como $y = \frac{1}{x} > 0$ en $[1, 2]$ y sabemos que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, el área es: $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0,69 u^2$

9.12. Calcula el área de la región finita limitada por el eje horizontal y la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$.

Hay que buscar los puntos de corte de la parábola y el eje horizontal: $x^2 - 2x - 3 = 0$ si $x = 3$ y si $x = -1$. En el intervalo $[-1, 3]$, $x^2 - 2x - 3 \leq 0$, luego el área pedida es:

$$\int_{-1}^3 -(x^2 - 2x - 3) dx = \left[-\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right) \right]_{-1}^3 = -(9 - 9 - 9) + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = \frac{32}{3} u^2$$

9.13. Calcula el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$.

Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$2x - x^2 = x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2}$$

Como en $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, $f(x) \geq g(x)$, el área buscada es:

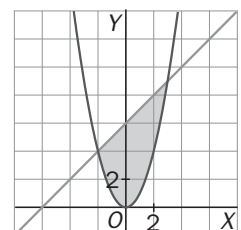
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-2x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{8}{3} u^2$$

9.14. Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x + 6$ e $y = x^2$.

Los puntos de corte de las funciones son:

$$x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{o} \quad x = 3. \text{ El área pedida es:}$$

$$\int_{-2}^3 (x + 6 - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^3 = \left(\frac{9}{2} + 18 - 9\right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right) = \frac{125}{6} u^2$$



9.15. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\text{a) } \int (\sin x - e^x + \sqrt{x}) dx \quad \text{c) } \int (1 + \sqrt[3]{x^2}) dx \quad \text{e) } \int \frac{\sqrt{x} - x^3 + 2x}{x^2} dx$$

$$\text{b) } \int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \quad \text{d) } \int \sqrt[3]{x^2} \sqrt{x} dx$$

$$\text{a) } \int (\sin x - e^x + \sqrt{x}) dx = -\cos x - e^x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

$$\text{b) } \int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} + C$$

$$\text{c) } \int (1 + \sqrt[3]{x^2}) dx = x + \frac{3}{5} x\sqrt[3]{x^2} + C$$

$$\text{d) } \int \sqrt[3]{x^2} \sqrt{x} dx = \int \sqrt[6]{x^5} dx = \frac{6}{11} x\sqrt[6]{x^5} + C$$

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt{x} - x^3 + 2x}{x^2} dx = \int \left(x^{-\frac{3}{2}} - x + \frac{2}{x} \right) dx = -2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| + C$$

9.16. Calcula, en cada caso, la función $f(x)$ que verifica las condiciones dadas:

$$\text{a) } f'(x) = \cos x + x\sqrt{x} \text{ y } f(\pi) = 0$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{3}{1+x^2} - e^x \text{ y } f(0) = 1$$

$$\text{c) } f'(x) = x^3 - 4 \cdot 6^x \text{ y } f(0) = -\frac{4}{\ln 6}$$

$$\text{d) } f'(x) = x - 2\cos x, \text{ y la gráfica de } f \text{ corta a la bisectriz del 2.º cuadrante en el punto de abscisa } x = \pi.$$

$$\text{a) } f(x) = \int (\cos x + x\sqrt{x}) dx = \sin x + \frac{2}{5} x^2\sqrt{x} + C$$

$$\text{Como } f(\pi) = 0, f(\pi) = \sin \pi + \frac{2}{5} \pi^2 \sqrt{\pi} + C = \frac{2}{5} \pi^2 \sqrt{\pi} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{5} \pi^2 \sqrt{\pi}$$

$$\text{Por tanto, } f(x) = \sin x + \frac{2}{5} (x^2\sqrt{x} - \pi^2\sqrt{\pi})$$

$$\text{b) } f(x) = \int \left(\frac{3}{1+x^2} - e^x \right) dx = 3\arctg x - e^x + C$$

$$\text{Como } f(0) = 1, f(0) = 3\arctg 0 - e^0 + C = 1 \Rightarrow -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{La función es } f(x) = 3\arctg x - e^x + 2.$$

$$\text{c) } f(x) = \int (x^3 - 4 \cdot 6^x) dx = \frac{1}{4} x^4 - \frac{4}{\ln 6} 6^x + C$$

$$\text{Como } f(0) = -\frac{4}{\ln 6}, f(0) = -\frac{4}{\ln 6} + C = -\frac{4}{\ln 6} \Rightarrow C = 0$$

$$\text{La función es } f(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{4}{\ln 6} 6^x.$$

$$\text{d) } f(x) = \int (x - 2\cos x) dx = \frac{1}{2} x^2 - 2\sin x + C$$

$$\text{Como } f(\pi) = -\pi, \frac{1}{2} \pi^2 - 2\sin \pi + C = -\pi \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \pi^2 - \pi$$

$$\text{La función es } f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 2\sin x - \frac{1}{2} \pi^2 - \pi.$$

9.17. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt$

d) $\int \frac{\cos(\ln t)}{t} dt$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

b) $\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}} ds$

e) $\int \frac{e^s}{1+e^{2s}} ds$

h) $\int \frac{x}{1+9x^4} dx$

c) $\int (x^2+1)^{20} \cdot 5x dx$

f) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

a) $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t+2}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt = \sqrt{t^2+2t+3} + C$

b) $\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}} ds = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2s}}{1+e^{2s}} ds = \frac{1}{2} \ln(1+e^{2s}) + C$

c) $\int (x^2+1)^{20} \cdot 5x dx = \frac{5}{2} \int (x^2+1)^{20} \cdot 2x dx = \frac{5}{42} (x^2+1)^{21} + C$

d) $\int \frac{\cos(\ln t)}{t} dt = \text{sen}(\ln t) + C$

e) $\int \frac{e^s}{1+e^{2s}} ds = \int \frac{e^s}{1+(e^s)^2} ds = \text{arctg}(e^s) + C$

f) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \text{arcsen}(x^2) + C$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \frac{1}{2} \text{arcsen}(2x) + C$

h) $\int \frac{x}{1+9x^4} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{1+(3x^2)^2} dx = \frac{1}{6} \text{arctg}(3x^2) + C$

9.18. Halla las primitivas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x(\text{sen } x^2)(\cos^4 x^2)$

c) $h(x) = x^2 e^{x^3}$

b) $g(x) = \text{tg}(3x+2)$

d) $j(x) = 3(1+\text{tg}^2 x) \text{tg} x$

a) $F(x) = \int 2x(\text{sen } x^2)(\cos^4 x^2) dx = -\int (2x(-\text{sen } x^2))(\cos^4 x^2) dx = \frac{1}{5} (\cos^2 x^2)^5 + C$

b) $G(x) = \int \text{tg}(3x+2) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{3(-\text{sen}(3x+2))}{\cos(3x+2)} dx = -\frac{1}{3} \ln|\cos(3x+2)| + C$

c) $H(x) = \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$

d) $J(x) = \int 3(1+\text{tg}^2 x) \text{tg} x dx = 3 \int (1+\text{tg}^2 x) \text{tg} x dx = \frac{3}{2} \text{tg}^2 x + C$

9.19. Calcula las derivadas de $f(x) = \text{tg}^2 x$ y $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, simplificalas al máximo y explica qué observas.

$f'(x) = (\text{tg}^2 x)' = 2 \text{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \text{sen} x}{\cos^3 x}$

$g'(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{2 \text{sen} x \cos x}{\cos^4 x} = \frac{2 \text{sen} x}{\cos^3 x}$

Ambas derivadas son iguales.

9.20. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (1-x)e^{-x} dx$ c) $\int \sqrt{x} \ln x dx$ e) $\int te^{-\frac{t}{2}} dt$

b) $\int t^2 \ln t dt$ d) $\int (x^2 + 1) \cos x dx$ f) $\int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x dx$

a) $\int (1-x)e^{-x} dx$. Llamando $f(x) = 1-x$ y $g'(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -1$ y $g(x) = -e^{-x}$, se obtiene:

$$\int (1-x)e^{-x} dx = (1-x)(-e^{-x}) - \int (-1)(-e^{-x}) dx = (x-1)e^{-x} + e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

b) $\int t^2 \ln t dt$. Llamando $f(t) = \ln t$ y $g'(t) = t^2 \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t}$ y $g(t) = \frac{1}{3}t^3$.

$$\int t^2 \ln t dt = \frac{1}{3}t^3 \ln t - \int \frac{t^3}{3t} dt = \frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{9}t^3 + C$$

c) $\int \sqrt{x} \ln x dx$. Llamando $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \ln x - \int \frac{2x\sqrt{x}}{3x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \ln x - \int \frac{2\sqrt{x}}{3} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + C$$

d) $\int (x^2 + 1) \cos x dx$. Llamando $f(x) = x^2 + 1$ y $g'(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = 2x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\int (x^2 + 1) \cos x dx = (x^2 + 1)\operatorname{sen} x - \int 2x\operatorname{sen} x dx$$

Se vuelve a integrar por partes llamando $f(x) = 2x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = 2$ y $g(x) = -\cos x$.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1) \cos x dx &= (x^2 + 1)\operatorname{sen} x - \int 2x\operatorname{sen} x dx = (x^2 + 1)\operatorname{sen} x - \left(-2x \cos x - \int -2 \cos x dx \right) = \\ &= (x^2 + 1)\operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2\operatorname{sen} x + C = (x^2 - 1)\operatorname{sen} x + 2x \cos x + C \end{aligned}$$

e) $\int te^{-\frac{t}{2}} dt$ Llamando $f(t) = t$ y $g'(t) = e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow f'(t) = 1$ y $g(t) = -2e^{-\frac{t}{2}}$.

$$\int te^{-\frac{t}{2}} dt = -2te^{-\frac{t}{2}} - \int -2e^{-\frac{t}{2}} dt = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + C = -2e^{-\frac{t}{2}}(t+2) + C$$

f) $\int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x dx$ Llamando $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$ y $g(x) = -\cos x$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x dx &= -\operatorname{sen} x \cos x - \int \cos x(-\cos x) dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx = \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x dx \end{aligned}$$

Despejando se obtiene: $2 \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x \Rightarrow \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x dx = \frac{-\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} + C$.

9.21. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$ b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}} dx$ c) $\int \frac{x}{(5+x^2)^2} dx$ d) $\int (x^3+5)^4 \cdot x^2 dx$

a) Llamando $t = 1 + \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$: $\int \frac{1+\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{(1+\ln x)^2}{2} + C$

b) Llamando $t = x^3 + 5$, $dt = 3x^2 dx$: $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+5}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3} \sqrt{t} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+5} + C$

c) Llamando $t = 5 + x^2$, $dt = 2x dx$: $\int \frac{x}{(5+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(5+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5+x^2} + C$

d) Llamando $t = x^3 + 5$, $dt = 3x^2 dx$: $\int (x^3+5)^4 \cdot x^2 dx = \int \frac{t^4}{3} dt = \frac{t^5}{15} + C = \frac{(x^3+5)^5}{15} + C$

9.22. Calcula la integral $\int \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} dx$.

Realiza el cambio de variable $t = \sqrt{x-1}$, despeja x elevando al cuadrado en dicha expresión y sustituye x por el resultado obtenido en la función a integrar.

$$t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1}{x} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctg t + C = \arctg \sqrt{x-1} + C$$

9.23. Halla el valor medio de estas funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[0, 1]$

b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$ en $[-2, 4]$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ en $[0, 3]$

En todos los casos se puede aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral por ser funciones continuas en los intervalos correspondientes.

a) $\int_0^1 x^2 - 4x + 3 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} = f(c)(1-0) \Rightarrow f(c) = \frac{4}{3}$

El valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ es $\frac{4}{3}$.

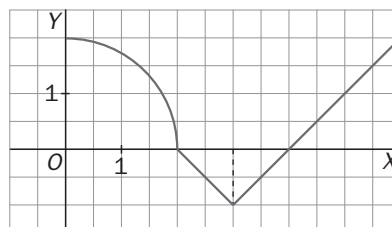
b) $\int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^2 x + 2 dx + \int_2^4 4 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^2 + [4x]_2^4 = 8 + 8 = 16 = f(c)(4 - (-2)) = 6f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{8}{3}$

El valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 4]$ es $\frac{8}{3}$.

c) $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) dx = \left[\frac{1}{6}x^2 + x \right]_0^3 = \frac{9}{2} = 3f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{3}{2}$

El valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[0, 3]$ es $\frac{3}{2}$.

9.24. Halla el valor medio de la función:



$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx =$$

= Área de un cuarto de círculo de radio 2 - área de triángulo + 0 + área encerrada por la recta $y = x - 4$ y el eje

$$X \text{ en el intervalo } [5,6] = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{3}{2} = \pi + 1 = 6f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{\pi + 1}{6}$$

EJERCICIOS

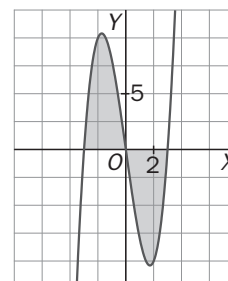
Área bajo una curva. Teorema fundamental del cálculo

9.25. (PAU) Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 9x$ y el eje X .

$$x^3 - 9x = 0 \text{ si } x = -3, x = 0 \text{ o } x = 3$$

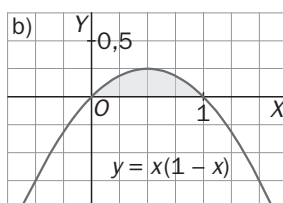
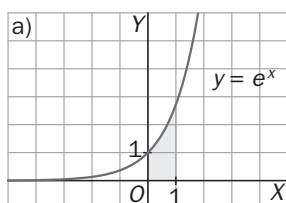
Se forman dos recintos, uno sobre el eje X para x en el intervalo $[-3, 0]$ y otro bajo el eje X para x en el intervalo $[0, 3]$.

El área buscada es:



$$\int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx - \int_0^3 (x^3 - 9x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-3}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) = \frac{81}{2} \text{ u}^2$$

9.26. Calcula el área de las siguientes regiones.

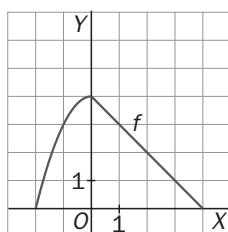


$$\text{a) } \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 \text{ u}^2 \quad \text{b) } \int_0^1 x(1-x) dx = \int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u}^2$$

9.27. (PAU) Representa gráficamente la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

y halla el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.



El área es:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_{-2}^0 (4 - x^2) dx + \int_0^4 (4 - x) dx = \\ &= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^0 + \left[4x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 = 8 - \frac{8}{3} + 16 - \frac{16}{2} = \frac{40}{3} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

9.28. (PAU) Dada la función $f(x) = x^2 + a$ con $a > 0$, calcula el valor de a para que el área determinada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ valga 27.

Como la función es siempre positiva, el área buscada es:

$$\int_0^3 (x^2 + a) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + ax \right]_0^3 = 9 + 3a = 27 \text{ si } a = 6$$

Integral definida. Regla de Barrow

9.29. Si f es continua y $f(1) = 2$, ¿cuál es el valor de $f(7)$, sabiendo que $\int_1^7 f'(x) dx = 3$?

Al ser f' continua, por la regla de Barrow: $\int_1^7 f'(x) dx = f(7) - f(1) = f(7) - 2 = 3 \Rightarrow f(7) = 5$

9.30. ¿Son verdaderas o falsas estas afirmaciones?

a) Si f es continua y par, entonces $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

b) Si f es continua, entonces $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

c) $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x dx = 2x$

d) $\int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) dx = 2 \int_0^1 (ax^2 + c) dx$

e) $\int_0^3 x(x-1)(x-3) dx$ mide el área de la región encerrada por la curva $f(x) = x(x-1)(x-3)$ y el eje horizontal.

f) El área encerrada por la curva $f(x) = x^2 - 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ es 6.

a) Cierta.

$$f \text{ es par si } f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

Haciendo $t = -x$, $dt = -dx$ en la primera integral, $t = a$ si $x = -a$ y $t = 0$ si $x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-a}^0 f(-x) dx = \int_a^0 -f(t) dt = - \int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$$

$$\text{Luego } \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

b) Falsa. Basta considerar $f(x) = 1$.

c) Falsa. La integral definida es un número, no una función.

d) Cierta.

Teniendo en cuenta que $ax^2 + c$ es una función par y utilizando el apartado a, se obtiene:

$$\int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) dx = \int_{-1}^1 (ax^2 + c) dx + \int_{-1}^1 bx dx = 2 \int_0^1 (ax^2 + c) dx + \left[\frac{b}{2} x^2 \right]_{-1}^1 =$$

$$= 2 \int_0^1 (ax^2 + c) dx + 0 = 2 \int_0^1 (ax^2 + c) dx$$

e) Falsa. La función cambia de signo en $[0, 3]$, y la región limitada por esa curva y el eje horizontal en $[0, 1]$ está por debajo del eje y en $[1, 3]$ está por encima.

f) Falsa. La función está por debajo del eje de abscisas en $[0, 1]$ y por encima en $[1, 3]$. Por tanto, el área es:

$$- \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = - \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 + 9 - 3 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{22}{3} \text{ u}^2$$

9.31. (PAU) Calcula $\int_{-1}^1 (x + |x|) dx$.

Se escribe la función a integrar como una función definida a trozos: $f(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$

$$\text{Así pues: } \int_{-1}^1 (x + |x|) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 2x dx = 0 + [x^2]_0^1 = 1$$

9.32. Calcula el área de las regiones numeradas de 1 a 5 en el siguiente dibujo.

Empezando por las más fáciles:

(3) es un triángulo de base 4 y altura 2 \Rightarrow

$$\Rightarrow A_3 = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ u}^2$$

(4) + (5) es un triángulo de base 4 y altura 2 \Rightarrow

$$\Rightarrow A_4 + A_5 = 4 \text{ u}^2$$

(4) es el área entre una parábola y una recta:

$$A_4 = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{6}2^3 = \frac{2}{3} \text{ u}^2$$

$$\text{Luego } A_5 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ u}^2$$

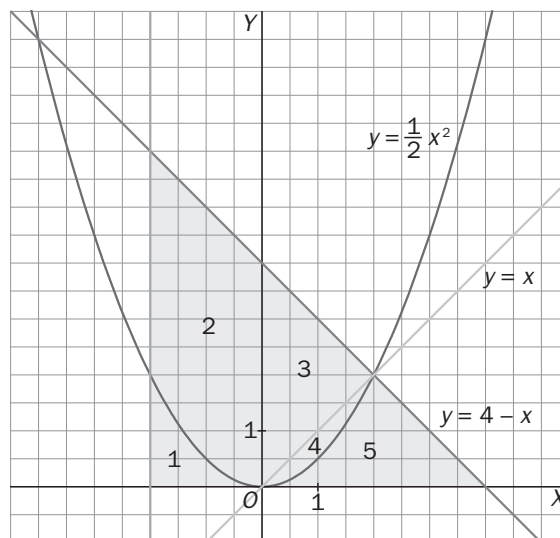
(1) + (2) es un trapecio de bases 6 y 4 y altura 2 \Rightarrow

$$\Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{(6+4) \cdot 2}{2} = 10 \text{ u}^2$$

(1) es el área entre el eje de abscisas, la parábola y

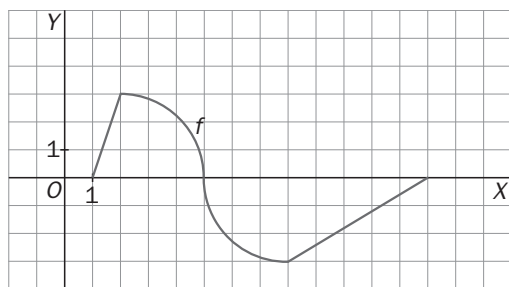
$$\text{la recta } x = -2 \Rightarrow A_1 = \int_{-2}^0 \frac{1}{2}x^2 dx = -\frac{1}{6}(-2)^3 = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

$$\text{Luego: } A_2 = 10 - \frac{4}{3} = \frac{26}{3} \text{ u}^2$$



Propiedades de la integral

9.33. Sea la función cuya gráfica es la de la figura, que consiste en segmentos y cuartos de circunferencia.



Calcula $\int_8^{13} f(x) dx$, $\int_1^{13} f(x) dx$, $\int_1^{13} |f(x)| dx$.

Las áreas de cada trozo son:

$$A_1 = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}; \quad A_2 = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4}; \quad A_3 = \frac{9\pi}{4}; \quad A_4 = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\int_8^{13} f(x) dx = -A_4 = -\frac{15}{2}$$

$$\int_1^{13} f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx + \int_8^{13} f(x) dx = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = \frac{3}{2} - \frac{15}{2} = -6$$

$$\int_1^{13} |f(x)| dx = \int_1^2 |f(x)| dx + \int_2^5 |f(x)| dx + \int_5^8 |f(x)| dx + \int_8^{13} |f(x)| dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{3}{2} + 2 \frac{9\pi}{4} + \frac{15}{2} = 9 + \frac{9\pi}{2}$$

9.34. Sea f continua en $[-1, 4]$ y $g(x) = f(x) - x$. Si $\int_{-1}^4 f(x) dx = 5$, calcula $\int_{-1}^4 g(t) dt$.

$$\int_{-1}^4 g(t) dt = \int_{-1}^4 (f(t) - t) dt = \int_{-1}^4 f(t) dt - \int_{-1}^4 t dt = 5 - \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^4 = 5 - 8 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

9.35. (PAU) Contesta, razonando la respuesta, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

b) $\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$

c) Si $\int_a^b f(x) dx = 0$, entonces $a = b$

d) Si $\int_a^b f(x) dx = 0$ y $f(x) > 0$ para todo x , entonces $a = b$

e) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

a) Verdadera, es la propiedad 4 de integrales.

b) Falsa. Por ejemplo, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, pero $\int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, luego $\int_0^1 x^2 dx \neq \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 x dx$

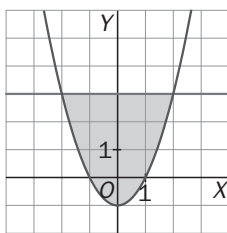
c) Falsa. Por ejemplo, $\int_{-1}^1 x dx = 0$

d) Verdadera por la propiedad 5

e) Verdadera, es la propiedad 2.

Área entre dos curvas

9.36. Halla el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 1$ y la recta horizontal $y = 3$.

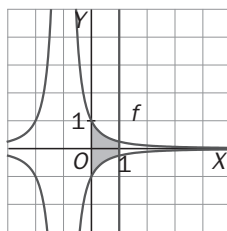


$$x^2 - 1 = 3 \text{ si } x = -2 \text{ o } x = 2$$

Como la recta está por encima de la parábola, el área buscada es:

$$\int_{-2}^2 (3 - x^2 + 1) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} \text{ u}^2$$

9.37. Calcula el área de la región del plano que está limitada entre las curvas $y = \frac{1}{(1+x)^2}$, $y = \frac{-1}{(1+x)^2}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.



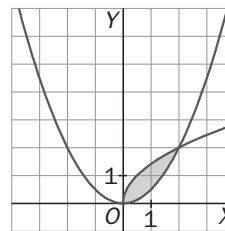
El área buscada es:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-1}{(1+x)^2} \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = 2 \left[\frac{-1}{1+x} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{-1}{2} + 1 \right) = 1 \text{ u}^2$$

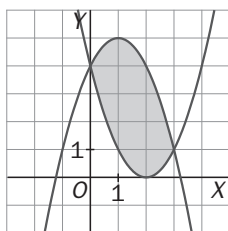
9.38.(PAU) Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = \sqrt{2x}$ e $y = \frac{x^2}{2}$.

$$\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 8x = x^4 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{El área buscada es: } \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{2x\sqrt{2x}}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4 \cdot 2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \text{ u}^2.$$



9.39.(PAU) Dibuja la región limitada por las parábolas $y = x^2 - 4x + 4$ e $y = -x^2 + 2x + 4$, y calcula el área de la región limitada por ambas curvas.



Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 3$$

El área buscada es:

$$\int_0^3 \left((-x^2 + 2x + 4) - (x^2 - 4x + 4) \right) dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 = -18 + 27 = 9 \text{ u}^2$$

9.40. Halla el área del recinto acotado por estas tres fronteras:

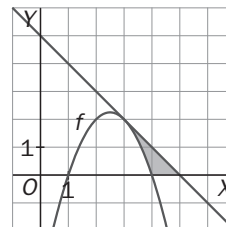
- La parábola de ecuación $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.
- La recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = 3$.
- El eje horizontal.

Hay que calcular la recta tangente a la parábola en el punto $A(3, f(3)) = A(3, 2)$.

Como $f'(x) = -2x + 5$, $f'(3) = -1$, y la recta tangente es: $y = -1(x - 3) + 2 \Rightarrow y = -x + 5$

El área buscada es:

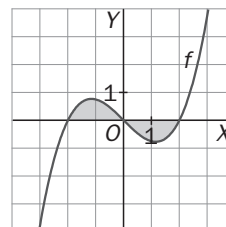
$$\begin{aligned} \int_3^4 \left((-x+5) - (-x^2+5x-4) \right) dx + \int_4^5 (-x+5) dx &= \int_3^4 (x^2 - 6x + 9) dx + \int_4^5 (-x+5) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_3^4 + \left[\frac{-x^2}{2} + 5x \right]_4^5 = \\ &= \left(\frac{4^3}{3} - 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 \right) + \left(\frac{-5^2}{2} + 5 \cdot 5 \right) - \left(\frac{-4^2}{2} + 5 \cdot 4 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ u}^2 \end{aligned}$$



9.41.(PAU) Calcula $\int_{-1}^1 x(x^2 - 1) dx$ y explica mediante un gráfico el significado geométrico del valor obtenido.

$$\int_{-1}^1 x(x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 = 0.$$

La función es simétrica con respecto a $O(0, 0)$ y, por tanto, el área de la derecha es igual al área de la izquierda.



9.42.(PAU) Considerando la curva de ecuaciones cartesianas $y = x^2 + 8x$:

- a) Calcula las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y = 2x$.
 b) Calcula el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación $y = x + 8$.

a) Como la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $f'(a)$ y la pendiente de la recta $y = 2x$ es 2, hay que calcular un punto $A(a, f(a))$ con $f'(a) = 2$.

$$f'(a) = 2a + 8 = 2 \text{ si } a = -3$$

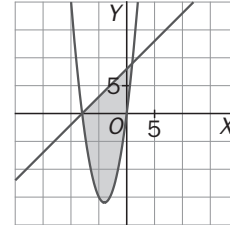
El punto buscado es $(-3, f(-3)) = A(-3, -15)$.

b) $x^2 + 8x = x + 8$ si $x = -8$ o $x = 1$

El área buscada es:

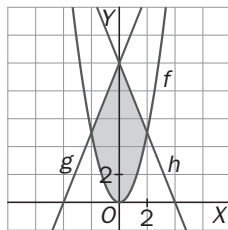
$$\int_{-8}^1 ((x+8) - (x^2+8x)) dx = \int_{-8}^1 (-x^2 - 7x + 8) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 8x \right]_{-8}^1 =$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{7}{2} \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{(-8)^3}{3} - \frac{7}{2}(-8)^2 + 8 \cdot (-8) \right) = \frac{243}{2} u^2$$



9.43.(PAU) Representa gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{5}{4}x^2$,

$g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20)$ y $h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$, y obtén su área.



Punto de corte de la función con cada una de las rectas:

$$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(5x + 20) \Rightarrow 5x^2 - 10x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 4$$

$$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(-5x + 20) \Rightarrow 5x^2 + 10x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ o } x = 2$$

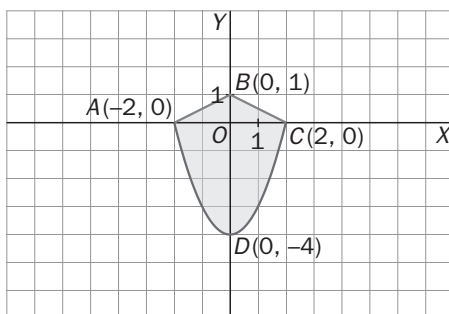
Observando el recinto, los puntos a considerar son $x = -2$ y $x = 2$.

El área es:

$$\int_{-2}^0 \left(\frac{5}{2}x + 10 - \frac{5}{4}x^2 \right) dx + \int_0^2 \left(-\frac{5}{2}x + 10 - \frac{5}{4}x^2 \right) dx = \left[\frac{5x^2}{4} + 10x - \frac{5}{12}x^3 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{5x^2}{4} + 10x - \frac{5}{12}x^3 \right]_0^2 =$$

$$= -\left(\frac{5(-2)^2}{4} + 10 \cdot (-2) - \frac{5}{12} \cdot (-2)^3 \right) + \left(-\frac{5 \cdot 2^2}{4} + 10 \cdot 2 - \frac{5}{12} \cdot 2^3 \right) = \frac{70}{3} u^2$$

9.44.(PAU) Determina el área de la figura ABCDA sabiendo que la curva ADC es parte de la gráfica de una función polinómica de segundo grado.



Como es simétrica, es suficiente con calcular el área que está a la derecha del eje vertical y multiplicarla por 2.

Ese área está limitada por la parábola que pasa por los puntos $A(-2, 0)$, $C(2, 0)$ y $D(0, -4)$.

Como corta al eje en $x = -2$ y en $x = 2$, su ecuación es $f(x) = a(x + 2)(x - 2)$, y como pasa por D , vale -4 si $x = 0$, $a = 1$.

Con estos datos, la ecuación de la parábola es $f(x) = x^2 - 4$.

La ecuación de la recta que pasa por B y C es $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

El área de la derecha es:

$$\int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x + 1 - (x^2 - 4) \right) dx = \int_0^2 \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + 5 \right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{4} + 5x \right]_0^2 = \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{2^2}{4} + 5 \cdot 2 \right) = \frac{19}{3} u^2 \Rightarrow$$

$$\text{Área buscada: } 2 \cdot \frac{19}{3} = \frac{38}{3} u^2$$

9.45. Calcula el valor de m , $m > 0$ para que el área encerrada entre las líneas $y = x^2$ e $y = mx$ sea 36.

Puntos de corte de las funciones: $x^2 = mx \Rightarrow x = 0$ o $x = m$

En el intervalo $[0, m]$, $x^2 \leq mx$, y como $m > 0$, el área entre la recta y la parábola es:

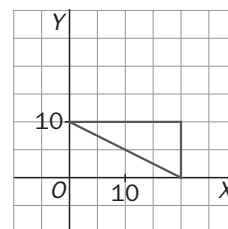
$$\int_0^m (mx - x^2) dx = \left[\frac{m}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^m = \frac{m}{2} \cdot m^2 - \frac{m^3}{3} = \frac{m^3}{6} = 36 \Rightarrow m = 6$$

9.46. (PAU) Calcula, por geometría elemental y utilizando el cálculo integral, el área del triángulo de vértices $(0, 10)$, $(20, 10)$ y $(20, 0)$.

La base del triángulo mide 20, y la altura, 10, luego su área es 100 u^2 .

Con cálculo integral, el triángulo es el área entre las rectas $y = 10$, $y = -\frac{1}{2}x + 10$,

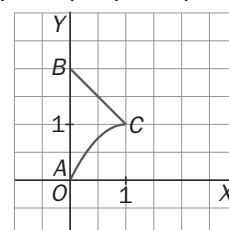
$$x = 0 \text{ y } x = 20: \int_0^{20} \left(10 - \left(-\frac{1}{2}x + 10 \right) \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^{20} = 100 \text{ u}^2$$



9.47. (PAU) Representa gráficamente y halla el área del recinto ABC , donde $A = (0, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (1, 1)$, las líneas AB y BC son rectas, y la línea AC tiene por ecuación $y = 2x - x^2$.

La recta que une los puntos BC tiene ecuación $y = -x + 2$.

$$\text{El área es: } \int_0^1 (-x + 2 - (2x - x^2)) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{5}{6} \text{ u}^2$$



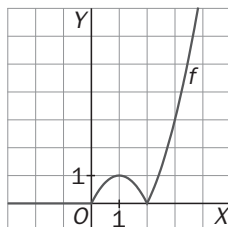
9.48. (PAU) Dada la función: $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad en el punto $x = 0$.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y la parte positiva del eje X.

a)



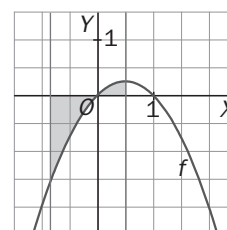
b) La función es continua en $x = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

$$c) \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

9.49. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x - x^2$. Encuentra el intervalo $[a, b]$ para el que $\int_a^b (x - x^2) dx$ alcanza el máximo valor.

Como $\int_a^b (x - x^2) dx$ mide la diferencia entre las áreas limitadas por la curva por encima y por debajo del eje horizontal, se obtendrá el máximo valor cuando se abarque toda la región de la curva que esté sobre el eje horizontal, esto es, en $[0, 1]$.

Así pues, el máximo valor de la integral es $\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$.



La integral indefinida. Primitivas inmediatas

9.50. Identifica cada una de las primitivas siguientes con una de la tabla dada en el texto y, a continuación, resuélvelas.

a) $\int \left(\frac{1}{x} + 2\right) dx$

e) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

i) $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 3}{x} dx$

m) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

b) $\int \operatorname{tg} x dx$

f) $\int \operatorname{sen} 2x dx$

j) $\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{2}{1+x^2} + \cos x\right) dx$

n) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

c) $\int (3x-5)^2 dx$

g) $\int xe^{x^2} dx$

k) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

ñ) $\int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

d) $\int x^3 \sqrt[4]{x^5} dx$

h) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$

l) $\int x \left(x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2 - 1}\right) dx$

o) $\int e^{2x} \sqrt[7]{e^{2x} + 1} dx$

a) $\int \left(\frac{1}{x} + 2\right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int 2 dx = \ln|x| + 2x + C$. Tipos 2 y 1

b) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$. Tipo 2

c) $\int (3x-5)^2 dx = \frac{1}{3} \int 3(3x-5)^2 dx = \frac{1}{9} (3x-5)^3 + C$. Tipo 1

d) $\int x^3 \sqrt[4]{x^5} dx = \int x^{\frac{17}{4}} dx = \frac{4}{21} x^{\frac{21}{4}} + C = \frac{4}{21} x^5 \sqrt[4]{x} + C$. Tipo 1

e) $\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) + C$. Tipo 9

f) $\int \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{2} \int 2\operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C$. Tipo 6

g) $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$. Tipo 3

h) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C$. Tipo 1

i) $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 3}{x} dx = \int x^2 dx - 5 \int x dx + 3 \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 3 \ln|x| + C$. Tipos 1 y 2

j) $\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{2}{1+x^2} + \cos x\right) dx = \int \operatorname{sen} x dx + \int \frac{2}{1+x^2} dx + \int \cos x dx = -\cos x + 2\operatorname{arctg} x + \operatorname{sen} x + C$. Tipos 6, 9 y 5

k) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} dx = \operatorname{arcsen}(e^x) + C$. Tipo 7

l) $\int x \left(x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2 - 1}\right) dx = \int x^3 dx - \int x dx + \int x \sqrt[3]{x^2 - 1} dx = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} (x^2 - 1) \sqrt[3]{x^2 - 1} + C$. Tipo 1

m) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C$. Tipo 9

n) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + C$. Tipo 1

ñ) $\int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \ln(\operatorname{sen}^2 x + 1) + C$. Tipo 2

o) $\int e^{2x} \sqrt[7]{e^{2x} + 1} dx = \frac{7}{16} (e^{2x} + 1) \sqrt[7]{e^{2x} + 1} + C$. Tipo 1

9.51.(PAU) Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx$

b) $\int (\sen 2x - \cos 3x + 2\cos x \sen x) dx$

c) $\int \sqrt{(1+e^x)^3} e^x dx$

a) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + C$

b) $\int (\sen 2x - \cos 3x + 2\cos x \sen x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sen 3x + \sen^2 x + C$

c) $\int \sqrt{(1+e^x)^3} e^x dx = \frac{2}{5} (1+e^x)^2 \sqrt{1+e^x} + C$

9.52. (PAU) Encuentra la primitiva de $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ que vale 5 en el 2.

$$F(x) = \int \left(x + \frac{4}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + C. \text{ Como } F(2) = 5, F(2) = \frac{2^2}{2} - \frac{4}{2} + C = 5 \Rightarrow C = 5$$

Entonces, $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + 5.$

9.53. Considerando la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$:

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Demuestra que si $x > 1$, la función $f(x)$ es siempre positiva.

c) Calcula el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ entre las rectas verticales $x = 2$ y $x = 3$.

a) $F(x) = \int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{\ln|x^2 - 1|}{2}$

b) Si $x > 1$, entonces el numerador es positivo y el denominador también, pues $x^2 - 1$ es positivo en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Por tanto, la función es siempre positiva si $x > 1$.

c) Como $f(x)$ es positiva en $[2, 3]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, el área buscada es $F(3) - F(2) = \frac{\ln 8 - \ln 3}{2} u^2$.

9.54.(PAU) Dada la función $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$:

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Justifica que $F(x) = x^4 + 2x - 4$ no es primitiva de $f(x)$.

c) Halla el área limitada por la función $f(x)$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

a) $F(x) = \int (x - 1)(x + 1)(x - 3) dx = \int (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$

b) Si lo fuera, debería cumplir que $F'(x) = f(x)$, pero $F'(x) = 4x^3 + 2 \neq (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ (para ver esto, no es necesario calcular el producto, basta ver que no valen lo mismo en $x = 1$).

c) Como la función cambia de signo en $[0, 2]$, es positiva en $[0, 1]$ y negativa en $(1, 2]$, el área es:

$$\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx = (F(1) - F(0)) - (F(2) - F(1)) = 2F(1) - F(2) = \frac{7}{2} u^2$$

9.55.(PAU) Determina la ecuación de la función polinómica f que pasa por los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 1)$, y tal que $f''(x) = 6x + 4$.

$$f'(x) = \int (6x + 4) dx = 3x^2 + 4x + C \quad y \quad f(x) = \int (3x^2 + 4x + C) dx = x^3 + 2x^2 + Cx + D$$

Como $y = f(x)$ pasa por $A(0, 1)$, debe ser $f(0) = D = 1$, y como pasa por $B(1, 1)$, $f(1) = 1 + 2 + C + 1 = 1 \Rightarrow C = -3$.
La función buscada es $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

9.56.(PAU) Da dos funciones cuya derivada sea $f(x) = \frac{1}{x+1} + e^{2x}$ tales que en el punto $x = 0$ una tenga doble valor que la otra.

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x+1} + e^{2x} \right) dx = \ln|x+1| + \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$F(0) = \frac{1}{2} + C$$

Si $C = 0$ para una de ellas, y para la otra, $C = \frac{1}{2}$, las funciones son $F(x) = \ln|x+1| + \frac{1}{2} e^{2x}$ y

$$G(x) = \ln|x+1| + \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2}.$$

Integración por partes

9.57. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int x e^x dx$

d) $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$

g) $\int \ln(x+1) dx$

j) $\int x \ln x dx$

b) $\int \frac{x dx}{2^x}$

e) $\int \operatorname{sen}^2 x dx$

h) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

k) $\int x (\ln x)^2 dx$

c) $\int \arctg x dx$

f) $\int (x^2 + x) e^{-2x+1} dx$

i) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

l) $\int e^x \cos(3x) dx$

a) Si $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$, $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x \Rightarrow \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C$

b) Si $f(x) = x$ y $g'(x) = 2^{-x}$, $f'(x) = 1$ y $g(x) = \frac{-1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2^x} \Rightarrow \int \frac{x dx}{2^x} = \frac{-x}{2^x \ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \int \frac{1}{2^x} dx = \frac{-x}{2^x \ln 2} - \frac{1}{2^x (\ln 2)^2} + C$

c) Si $f(x) = \arctg x$ y $g'(x) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = x \Rightarrow$

$$\int 1 \cdot \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x}{x^2+1} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

d) Si $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{4}{3} x \sqrt[3]{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \sqrt[3]{x} \ln x dx = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \ln x - \int \frac{3}{4} \frac{x \sqrt[3]{x}}{x} dx = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \ln x - \frac{3}{4} \int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \ln x - \frac{9}{16} x \sqrt[3]{x} + C$$

e) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$ y $g(x) = -\cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^2 x dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x dx$$

Despejando obtenemos $\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C$.

f) $\int (x^2 + x) e^{-2x+1} dx$ $f(x) = x^2 + x$ y $g'(x) = e^{-2x+1}$; $f'(x) = 2x + 1$ y $g(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int (x^2 + x) e^{-2x+1} dx = -\frac{1}{2} (x^2 + x) e^{-2x+1} + \frac{1}{2} \int (2x + 1) e^{-2x+1} dx. \text{ Si ahora } f(x) = 2x + 1 \text{ y } g'(x) = e^{-2x+1};$$

$$f'(x) = 2 \text{ y } g(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x+1} \Rightarrow \int (x^2 + x) e^{-2x+1} dx = -\frac{1}{2} (x^2 + x) e^{-2x+1} - \frac{1}{4} (2x + 1) e^{-2x+1} + \frac{1}{2} \int e^{-2x+1} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} (x^2 + x) e^{-2x+1} - \frac{1}{4} (2x + 1) e^{-2x+1} - \frac{1}{4} e^{-2x+1} + C = -\frac{1}{2} e^{-2x+1} (x^2 + 2x + 1) + C$$

g) Si $f(x) = \ln(x+1)$ y $g'(x) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = x$

$$\int \ln(x+1) dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx =$$

$$= x \ln(x+1) - x + \int \frac{1}{x+1} dx = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$$

h) $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = \frac{1}{x^2}$; $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln x + 1}{x} + C$

i) $\int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^2 \cdot x e^{-x^2} dx$

Si $f(x) = x^2$ y $g'(x) = x e^{-x^2}$; $f'(x) = 2x$ y $g(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^2 \cdot x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + C$$

j) Si $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

k) Si $f(x) = (\ln x)^2$ y $g'(x) = x$, $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int x (\ln x)^2 dx = \frac{(x \ln x)^2}{2} - \int x \ln x dx = \frac{(x \ln x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C \text{ (por el apartado j)}$$

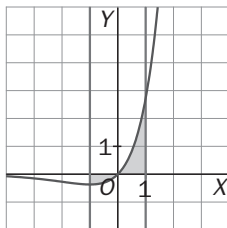
l) Si $f(x) = \cos 3x$ y $g'(x) = e^x$, $f'(x) = -3 \operatorname{sen} 3x$ y $g(x) = e^x \Rightarrow \int e^x \cos(3x) dx = e^x \cos 3x + 3 \int e^x \operatorname{sen} 3x dx$

Si ahora $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ y $g'(x) = e^x$, $f'(x) = 3 \cos 3x$ y $g(x) = e^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int e^x \cos(3x) dx = e^x \cos(3x) + 3e^x \operatorname{sen}(3x) - 9 \int e^x \cos(3x) dx$$

Despejando: $\int e^x \cos(3x) dx = \frac{e^x \cos(3x) + 3e^x \operatorname{sen}(3x)}{10} + C.$

9.58. Halla el área que encierra el recinto limitado por las gráficas de $f(x) = xe^x$, $y = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.



$$A = -\int_{-1}^0 xe^x dx + \int_0^1 xe^x dx = -[e^x(x-1)]_{-1}^0 + [e^x(x-1)]_0^1 = -\left(\frac{2}{e} - 1\right) + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

9.59. (PAU) Enuncia la regla de Barrow y aplícala a la función $f(x) = e^x(x+1)$ en el intervalo $[0, 1]$.

Regla de Barrow: Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier primitiva de f , $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Como $f(x)$ es continua, se calcula una de sus primitivas, $F(x) = \int e^x(x+1) dx$.

Llamando $f(x) = x+1$ y $g'(x) = e^x$, $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x$,

$$F(x) = \int e^x(x+1) dx = e^x(x+1) - \int e^x dx = e^x(x+1) - e^x = xe^x$$

Por tanto: $\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = e$

Integración por cambio de variable

9.60. Calcula la integral $\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x dx$ mediante el cambio $t = e^x$.

$$t = e^x; dt = e^x dx \Rightarrow \int e^{2x} \operatorname{sen} e^x dx = \int e^x e^x \operatorname{sen} e^x dx = \int e^x \operatorname{sen} e^x e^x dx = \int t \operatorname{sen} t dt.$$

Integrando por partes: $f(t) = t$ y $g'(t) = \operatorname{sen} t$; $f'(t) = 1$ y $g(t) = -\cos t$

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x dx = \int t \operatorname{sen} t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = -t \cos t + \operatorname{sen} t + c = -e^x \cos e^x + e^x \operatorname{sen} e^x + c$$

9.61. Calcula:

a) $\int \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cos x dx$ b) $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} dx$ c) $\int \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-4x}} dx$ d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

a) $t = \operatorname{sen} x$; $dt = \cos x dx \Rightarrow \int \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cos x dx = \int \operatorname{sen} t dt = -\cos t + C = -\cos(\operatorname{sen} x) + C$

b) $t = e^x$; $dt = e^x dx \Rightarrow \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} dx = \int \frac{1}{(t+1)^3} dt = \frac{-1}{2(t+1)^2} + C = -\frac{1}{2(e^x + 1)^2} + C$

c) $t = e^{-2x}$; $dt = -2e^{-2x} dx \Rightarrow \int \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-4x}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{-2x} + C$

d) $t = \ln x$; $dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \cos t dt = \operatorname{sen} t + C = \operatorname{sen}(\ln x) + C$

Teorema del valor medio del cálculo integral

9.62. Encuentra el valor medio de:

a) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f_3(x) = x^{\frac{1}{3}}$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

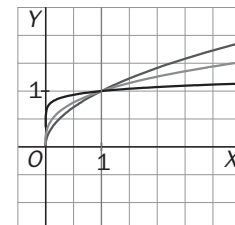
b) Conjetura, a partir del apartado anterior, el valor medio de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ en dicho intervalo.

c) ¿A qué número se aproxima el valor medio de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ cuando n es grande? ¿Se puede explicar este resultado a partir de la gráfica de dicha función?

a) Valor medio de $f_1(x)$: $\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} = f_1(c)(1-0) = f_1(c)$

Valor medio de $f_2(x)$: $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} = f_2(c)$

Valor medio de $f_3(x)$: $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4} = f_3(c)$



b) $f(c) = \frac{n}{n+1}$

c) Se aproxima a 1. En las gráficas de $f(x)$ se observa que a medida que n crece, el área parece cada vez más un cuadrado de lado 1.

9.63. Dos autores de este libro han hecho en el verano de 2008 la travesía a pie de los Carros de Foc por el Pirineo catalán empleando 95 horas, a lo largo de las cuales fueron anotando la altitud a la que se encontraban en diversos momentos y, después de aproximar y redondear los datos, obtuvieron la siguiente tabla:

Tiempo (h)	3	15	30	25	20	2
Altitud (m)	2000	2200	2300	2400	2500	2600

¿Cuál fue la altitud media a la que se movieron?

La altitud media es el valor medio de la función altitud en el intervalo $[0, 95]$.

Como no se conoce la expresión de la altitud, sino solo una tabla de valores, se aproxima dicha integral con la suma de las áreas de los rectángulos, es decir, el numerador de la siguiente fracción:

$$\text{Altitud media} \approx \frac{3 \cdot 2000 + 15 \cdot 2200 + 30 \cdot 2300 + 25 \cdot 2400 + 20 \cdot 2500 + 2 \cdot 2600}{95} \approx 2349,47 \text{ m}$$

Aplicaciones de la integral definida en las ciencias sociales

9.64.(PAU) Una empresa quiere producir $c(t) = 200 + 10t$ unidades de un producto que pretende vender a $p(t) = 200 - 2t$ euros cada unidad, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la producción.

a) Halla, dependiendo de t , la función beneficio $B(t)$.

b) Halla el beneficio acumulado durante los primeros 90 días.

a) El beneficio de un día es $B(t) = c(t) \cdot p(t) = 40\,000 + 1600t - 20t^2 = 20(2000 + 80t - t^2)$ euros.

b) Para saber el beneficio acumulado se calcula:

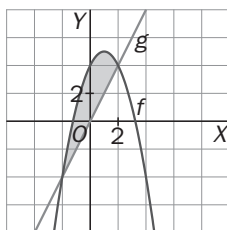
$$\int_0^{90} B(t) dt = 20 \int_0^{90} (2000 + 80t - t^2) dt = 20 \left[2000t + 40t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^{90} = 20(180000 + 324000 - 243000) = 5220000 \text{ €}$$

9.65.(PAU) Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y la recta $g(x) = 2x$.

a) Halla la representación gráfica simultánea de estas dos funciones.

b) Si una unidad del área de este plano equivale a 1 km^2 y el precio del kilómetro cuadrado es de 30 millones de euros, ¿qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?

a)



b) Las funciones se cortan en los puntos: $-x^2 + 2x + 4 = 2x \Rightarrow x = -2$ o $x = 2$

$$\text{Su área: } \int_{-2}^2 (-x^2 + 2x + 4 - 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \text{ km}^2$$

$$\text{El precio del terreno: } 30 \cdot \frac{32}{3} = 320 \text{ millones de €}$$

9.66.(PAU) Una empresa estima que la tasa de variación de gastos de mantenimiento de sus equipos informáticos viene dada por la función:

$$m(t) = 10 + 10t + 4t^2$$

Donde t se mide en años, y m , en cientos de euros por año.

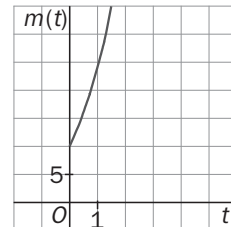
Se pide:

- Dibujar la gráfica y hacer una interpretación.
- Hallar el área entre la curva anterior y el eje de abscisas, entre los valores $t = 0$ y $t = 5$. ¿Qué representa el resultado?

a) La tasa de variación de los gastos de mantenimiento aumenta con el paso del tiempo.

$$b) \int_0^5 (10 + 10t + 4t^2) dt = \left[10t + 5t^2 + \frac{4t^3}{3} \right]_0^5 = \frac{1025}{3} \approx 341,67$$

El área representa el dinero total gastado en mantenimiento de equipos los 5 primeros años y es de 34 167 euros.



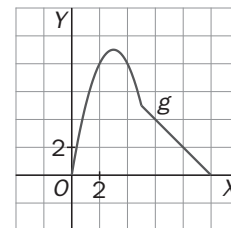
PROBLEMAS

9.67. Un publicista diseña un panel publicitario que tiene la siguiente forma: base horizontal de 10 m de

longitud y resto del contorno limitado por la función $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ -x + 10 & \text{si } 5 < x \leq 10 \end{cases}$. Dibuja el recorrido

correspondiente al cartel publicitario y calcula su área.

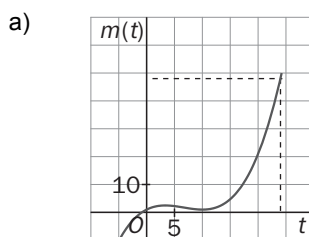
$$A = \int_0^5 (-x^2 + 6x) dx + \int_5^{10} (-x + 10) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^5 + \left[-\frac{x^2}{2} + 10x \right]_5^{10} = \left(-\frac{125}{3} + 75 \right) + (-50 + 100) - \left(-\frac{25}{2} + 50 \right) = \frac{100}{3} + \frac{25}{2} = \frac{275}{6} \text{ m}^2$$



9.68. Una fábrica arroja diariamente material a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función:

$m(t) = 0,01t^3 - 0,2t^2 + t + 1$, siendo m la cantidad de material en kg, y t , la hora del día.

- Esboza la gráfica de esta función en el intervalo $[0, 24]$.
- ¿Qué representa el área bajo esa curva y sobre el eje horizontal?
- Calcula el material que se arroja al día.



b) El área bajo la curva representa la cantidad de material arrojado en un día.

$$c) \int_0^{24} (0,01t^3 - 0,2t^2 + t + 1) dt = \left[\frac{0,01t^4}{4} - \frac{0,2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right]_0^{24} = \frac{0,01 \cdot 24^4}{4} - \frac{0,2 \cdot 24^3}{3} + \frac{24^2}{2} + 24 = 219,84 \text{ kg al día}$$

9.69. Un estudio estadístico permite establecer que en cierta ciudad, el número de hogares en los que hay ordenador viene dado por la función $f(t) = \frac{e^{0,1t}}{2 + e^{0,1t}}$, donde t mide los años transcurridos desde el 1 de enero de 2004, y $f(t)$, en miles de hogares.

Calcula la media de hogares en los que hay ordenadores entre el 1 de enero de 2006 y el 1 de enero de 2010.

$$\int_2^6 \frac{e^{0,1t}}{2 + e^{0,1t}} = 10 \left[\ln(2 + e^{0,1t}) \right]_2^6 \approx 1,71 = f(c)(6 - 2) \Rightarrow f(c) \approx \frac{1,71}{4} \approx 0,43. \text{ Es decir, 430 hogares.}$$

9.70. El número de personas afectadas por una enfermedad contagiosa viene dado por $N(t) = 1000(1 - e^{-0,2t})$, donde t representa el número de días transcurridos desde la aparición de la epidemia. Se acepta que el valor medio de la función $N(t)$ en el intervalo $[0, 30]$ es una buena aproximación del número medio de enfermos por día en un periodo de 30 días. Calcula esa media de enfermos por día.

$$\int_0^{30} 1000(1 - e^{-0,2t}) = 1000 \left[t + 5e^{-0,2t} \right]_0^{30} \approx 25012,39 = 30 f(c)$$

$$f(c) \approx \frac{25012,39}{30} \approx 834 \text{ enfermos de media al día.}$$

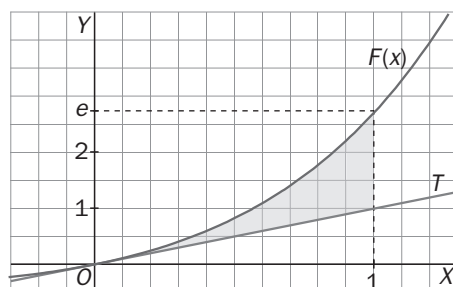
PROFUNDIZACIÓN

9.71. Sea f la función definida en el intervalo $[-1, 1]$ por $f(x) = (ax + b)e^{kx}$, donde a , b y k son números reales, y sea la curva de la figura un trozo de su gráfica. La recta T es tangente a dicha curva en el origen.

a) Sabiendo que T pasa por $(1, 1)$, calcula su pendiente.

b) Con el apartado anterior y sabiendo que la gráfica de f pasa por $(1, e)$, calcula a , b y k .

c) Calcula el área sombreada.



a) Como T pasa por $O(0, 0)$ y por $A(1, 1)$, su pendiente es $m = 1$.

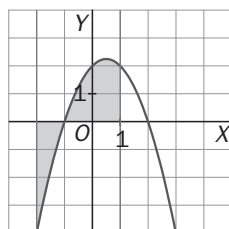
b) Como la función pasa por el origen, debe ser $f(0) = b = 0$. Y como pasa por $B(1, e)$, debe ser $ae^k = e$.

Como la pendiente de T es 1, debe ser $f'(0) = 1 \Rightarrow f'(x) = ae^{kx}(kx + 1)$ y $f'(0) = a = 1$. Al sustituir en $ae^k = e$, $k=1$. Por tanto, la función es $f(x) = xe^x$.

c) La ecuación de la recta tangente es $y = x$, y el área sombreada:

$$\int_0^1 (xe^x - x) dx = \left[e^x(x-1) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

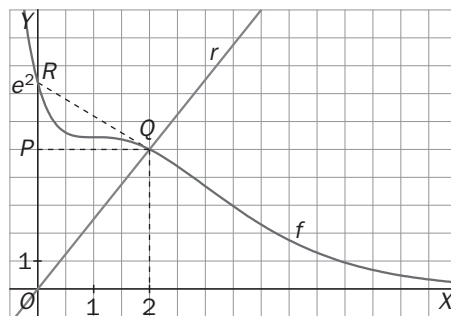
9.72. Encuentra el intervalo $[a, b]$ para el que la integral $\int_a^b (2 + x - x^2) dx$ alcanza su máximo valor.



Como $\int_a^b (2 + x - x^2) dx$ mide la diferencia entre las áreas limitadas por la curva por encima y por debajo del eje horizontal, se obtiene el máximo valor cuando toda la región que abarca la curva esté por encima del eje horizontal, esto es, en $[-1, 2]$.

$$\text{Luego el máximo valor de la integral es: } \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

9.73. Sea f la función definida en \mathbb{R} por $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x+2}$. En el dibujo se muestra un trozo de la gráfica de f , así como la recta $r: y = \frac{5}{2}x$.



a) Comprueba que el punto $Q(2, 5)$ está en dicha recta y en la gráfica de f .

b) Calcula el área de los triángulos OPQ y ORQ .

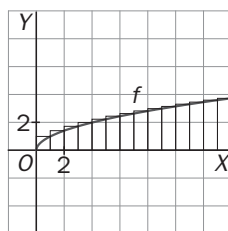
c) Calcula el área encerrada por las gráficas de f , el eje vertical y la recta r , y comprueba que el número obtenido está comprendido entre los dos números del apartado b.

a) Está en la recta, pues $\frac{5}{2} \cdot 2 = 5$, y también en la curva, pues $(2^2 + 1)e^{-2+2} = 5$.

b) OPQ tiene base 5 y altura 2, su área es 5 u^2 . ORQ tiene base e^2 y altura 2, luego su área es $e^2 \approx 7,389 \text{ u}^2$.

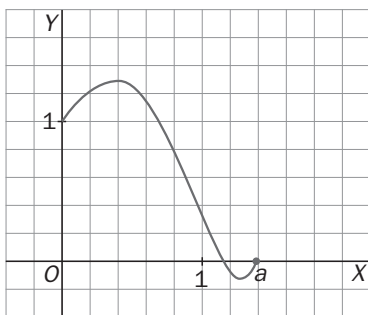
c) $\int_0^2 \left((x^2 + 1)e^{-x+2} - \frac{5}{2}x \right) dx = \left[-e^{-x+2}(x^2 + 2x + 3) - \frac{5x^2}{4} \right]_0^2 = 3e^2 - 16 \approx 6,167$, que está comprendido entre los valores obtenidos anteriormente.

9.74. Supón que tienes que calcular la suma de las raíces cuadradas de los 10 000 primeros números naturales. Aproxima ese valor con una integral.



$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{1000} \approx \int_0^{10000} \sqrt{x} dx = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} \right]_0^{10000} = \frac{2000000}{3} \approx 666666,67$$

9.75. La gráfica de la función $y = f(x)$ es la que tienes debajo. Ordena, de menor a mayor, los siguientes números.



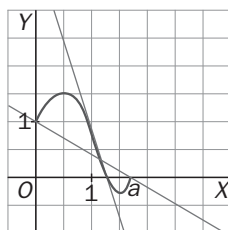
- a) $f'(1)$
- b) El valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[0, a]$
- c) El valor medio de la función $f'(x)$ en el intervalo $[0, a]$
- d) $\int_0^a f(x) dx$

$f'(1)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$.
El valor medio de la función $f'(x)$ en el intervalo $[0, a]$ es la pendiente de la recta que une los puntos $A(0, f(0))$ y $B(a, f(a))$.

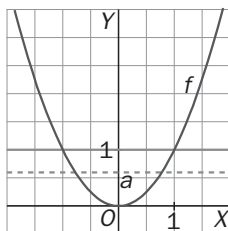
Trazando ambas rectas se observa que la $f'(1)$ es menor que $\frac{f(a) - f(0)}{a}$ y que ambos números son negativos.

El valor medio de f es $f(c)$ con $\int_0^a f(x) dx = f(c)(a - 0)$, y como a es mayor que 1, entonces $\int_0^a f(x) dx > f(c)$.

Además, ambos números son positivos, pues claramente el área sobre el eje horizontal es mayor que el área por debajo del eje. Luego $f'(1) < \frac{f(a) - f(0)}{a} < f(c) < \int_0^a f(x) dx$.



9.76. (PAU) Dos hermanos heredan una parcela que tiene la forma de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Deciden dividirla en dos regiones de igual área mediante la recta horizontal $y = a$. Calcula el valor de a .



La recta $y = 1$ corta a la parábola en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 1$, y la recta $y = a$ la corta en los puntos de abscisa $x = -\sqrt{a}$ y $x = \sqrt{a}$.

Como se ha de dividir en dos partes de igual área mediante la recta $y = a$, tiene que ocurrir que:

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

Al resolver la integral primera se obtiene: $\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$

Igualando el resultado a $\frac{2}{3}$ y despejando: $\frac{4a\sqrt{a}}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{a^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0,63$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta en cada caso:

9.1. En Economía, el coste marginal se identifica con la derivada del coste total. En una empresa, un estudio ha concluido que el coste marginal $C_m(q)$ expresado en miles de euros en función del número q de artículos fabricados viene dado por $C_m(q) = 3q^2 - 12q - 17$. ¿Cuál es el coste total $C_T(q)$ en miles de euros sabiendo que para 5 artículos es de 20 000 euros?

- A) $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q$ C) $C_T(q) = 6q - 12$
 B) $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + 5$ D) $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + 130$

La respuesta correcta es la D.

Una primitiva de $C_m(q) = 3q^2 - 12q - 17$ es $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + C$.

Como $C_T(5) = 20$, se puede hallar la constante C : $C_T(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 17 \cdot 5 + C = 20$, por tanto $C = 130$ y

$C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + 130$.

9.2. La función $F(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}$ definida en $(0, +\infty)$ resulta ser una primitiva de una función f definida en ese conjunto. Otra primitiva, G , de f podría ser:

- A) $\frac{4x+2}{x^2+x}$ D) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$
 B) $\frac{3x^2+5x+2}{2(x^2+x)}$ E) $2\ln|x+1| - \ln|x|$
 C) $\frac{x^3+x^2+x-1}{x(x+1)}$

La respuesta correcta es B.

Para que ambas sean primitivas de una misma función, deben diferir en una constante:

$$F(x) - G(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{3x^2+5x+2}{2(x^2+x)} = \frac{4x-2x-2-3x^2-5x+2}{2x(x+1)} = \frac{-3x^2-3x}{2x(x+1)} = \frac{-3x(x+1)}{2x(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

9.3. Sea S el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $a \leq x \leq b$ y $0 \leq y \leq f(x)$. Si el área de S vale 1, ¿cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- a) $a = -1, b = 0, y f(x) = e^{-x}$ c) $a = 0, b = \frac{\pi}{4}, y f(x) = \operatorname{tg} x$
 b) $a = 1, b = e y f(x) = \frac{1}{x}$ d) $a = 0, b = \frac{\pi}{2}, y f(x) = \operatorname{sen} x$

- A) Ninguna D) Solo tres
 B) Solo una E) Las cuatro
 C) Solo dos

La respuesta correcta es la C ya que son ciertas b y d:

a) $\int_{-1}^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-1}^0 = -e^0 - (-e) = e - 1$. FALSA.

b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$. VERDADERA.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\ln 1) = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$. FALSA

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$. VERDADERA.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

9.4. Sea $I = \int_{-1}^2 (x^2 - 1) dx$.

A) I mide el área de la región comprendida entre la curva de ecuación $y = x^2 - 1$, e eje de abscisas y las rectas de ecuación $x = -1$, $x = 2$.

B) $I = 0$

C) $I = \int_{-2}^1 (1 - x^2) dx$

D) $I = [2x]_{-1}^2$

E) $I \leq \int_1^2 (x^2 - 1) dx$

Son correctas las afirmaciones B, C y E.

A) La función $f(x) = x^2 - 1$ es una parábola que va por debajo del eje X entre -1 y 1 , así pues, I no mide el área entre -1 y 2 .

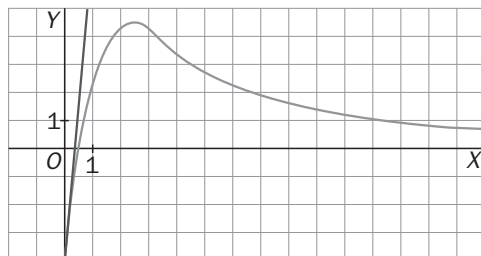
B) $\int_{-1}^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^2 = 0$

C) $\int_{-2}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = 0$

D) $[2x]_{-1}^2 = 4 - (-2) = 6$

E) $\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \frac{4}{3}$. Entre 1 y 2 la función va siempre por encima del eje X .

9.5. La gráfica de la figura es la de una función f derivable en el intervalo $[0, 10]$.



A) $f'(0) = 9$

B) $f'(5) > 0$

C) Cualquier primitiva de f se anula en $x = \frac{1}{2}$.

D) Cualquier primitiva de f es decreciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

E) Cualquier primitiva de f admite un máximo relativo en $x = \frac{5}{2}$.

Son correctas las afirmaciones A y E.

A) La pendiente de la recta tangente el punto $(0, -4)$ es $\frac{5 - (-4)}{1 - 0} = 9$, por lo que $f'(0) = 9$.

B) La tangente el punto de abscisa 5 es decreciente y por tanto, $f'(5)$ debe ser negativa.

C) Al ser $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, cualquier primitiva de f tendrá un mínimo relativo en $x = \frac{1}{2}$.

D) Al ser f negativa en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sus primitivas son decrecientes en dicho intervalo.

E) Para que una primitiva de f tenga un máximo es indispensable que f se anule en dicho punto.

Elije la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

9.6. Sea f una función continua en el intervalo $[0, 4]$.

- a) $\int_0^4 f(x) dx > 0$
 b) $f(x) > 0$ en $[0, 4]$

- A) $a \Leftrightarrow b$
 B) $a \Rightarrow b$, pero $b \not\Rightarrow a$
 C) $b \Rightarrow a$, pero $a \not\Rightarrow b$
 D) a y b se excluyen entre sí.
 E) Nada de lo anterior

La respuesta correcta es C.

Si f es estrictamente positiva en $[0, 4]$ entonces $\int_0^4 f(x) dx$ debe ser positiva ya que dicha integral mide el área entre la curva y el eje X . La otra implicación no es cierta ya que la integral definida puede ser mayor que cero sin que la función sea siempre positiva.

Señala el dato necesario para contestar:

9.7. Sea $f(x) = a \sin x + b e^{-x} + c \sqrt{x}$, de la que se sabe que en el punto de abscisa d la gráfica de f presenta tangente horizontal. Para calcular $\int_1^d f''(x) dx$ se tienen los siguientes datos.

- a) El valor de a .
 b) El valor de b .
 c) El valor de c .
 d) El valor de d .

- A) Puede eliminarse el dato a .
 B) Puede eliminarse el dato b .
 C) Puede eliminarse el dato c .
 D) Puede eliminarse el dato d .
 E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es D.

Como $f'(d) = 0$ ya que la tangente en d es horizontal, se obtiene: $\int_1^d f''(x) dx = f'(d) - f'(1) = 0 - f'(1) = -f'(1)$.

Además la derivada de f es $f'(x) = a \cos x - b e^{-x} + \frac{c}{2\sqrt{x}}$, por tanto, para calcular $\int_1^d f''(x) dx = -f'(1)$ no hace falta el valor de d .

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la siguiente cuestión:

9.8. Para decidir el signo de la integral $\int_0^2 f(x) dx$, siendo f una función continua y creciente, se sabe que:

- a) $f(2) > 0$ b) $f(0) > 0$
A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola.
B) a es suficiente por sí sola pero b no.
C) b es suficiente por sí sola, pero a no.
D) Son necesarias las dos juntas.
E) Hacen faltan más datos.

La respuesta correcta es la C.

Si $f(0) > 0$, como f es creciente, se deduce que f es positiva en el intervalo $[0, 2]$, por lo que $\int_0^2 f(x) dx$ es positiva.

En cambio si $f(2) > 0$, no se aporta ninguna información sobre el signo de la función en $[0, 2]$ y no se puede concluir nada acerca del signo de la integral.