8 Representación de funciones

ACTIVIDADES INICIALES

8.I. Escribe los siguientes cocientes $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como $C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ con $C(x)$ y $R(x)$ polinomios y el grado de $R(x)$ menor que el grado de $Q(x)$:

a) $\dfrac{x^3+2x^2-1}{x+2}$ **b)** $\dfrac{x^4-x^3+x^2+x}{x^2+x+2}$

a)
$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & +2x^2 & -1 & x+2 \\ \hline -x^3 & -2x^2 & & x^2 \\ \hline & & -1 & \end{array}$$

$P(x) = x^2\,(x + 2) - 1$

Por tanto: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + \dfrac{-1}{x+2}$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -x^3 & +x^2 & +x & & x^2+x+2 \\ \hline -x^4 & -x^3 & -2x^2 & & & x^2-2x+1 \\ \hline & -2x^3 & -x^2 & +x & & \\ & 2x^3 & +2x^2 & +4x & & \\ \hline & & x^2 & +5x & & \\ & & -x^2 & -x & -2 & \\ \hline & & & 4x & -2 & \end{array}$$

$P(x) = (x^2 + x + 2)\,(x^2 - 2x + 1) + (4x - 2)$

Por tanto: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = x^2-2x+1+\dfrac{4x-2}{x^2+x+2}$

8.II. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $x^5 + x^4 - x^3 + 15x^2 = 0$ **b)** $x^4 + 10x^2 = -9$

a) Primero sacamos factor común y luego aplicamos Ruffini:

$x^5+x^4-x^3+15x^2=0 \Rightarrow x^2(x^3+x^2-x+15)=0 \Rightarrow x^2(x+3)(x^2-2x+5)=0$

Sus soluciones son $x = 0$ y $x = -3$.

b) Es una ecuación bicuadrada, $x^4+10x^2+9=0$, que se resuelve llamando $x^2 = t$:

$t^2+10t+9=0$, cuyas soluciones son $t = -9 = x^2$ y $t = -1 = x^2$, lo cual es imposible.

La ecuación $x^4+10x^2+9=0$ no tiene soluciones reales.

8.III. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $3x - x^3 \geq 0$ **b)** $\dfrac{x+5}{x^2+1}<2$ **c)** $\dfrac{x^2-4}{x+1}\leq 0$

a) $3x-x^3\geq 0 \Rightarrow x(3-x^2)\geq 0$. Esta última expresión se anula si $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Estudiamos el signo dividiendo la recta real por medio de los valores de x que anulan la expresión:

Valores de x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
Signo de $x(3-x^2)$	+	= 0	–	= 0	+	= 0	–

La solución está formada por todos los números x que pertenecen a $(-\infty,\ -\sqrt{3}]\cup[0,\ \sqrt{3}]$.

b) $\dfrac{x+5}{x^2+1}<2 \Rightarrow \dfrac{x+5}{x^2+1}-2<0 \Rightarrow \dfrac{-2x^2+x+3}{x^2+1}<0$. El denominador es siempre positivo, así que estudiamos el signo del numerador: $-2x^2+x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2},\ x=-1$. Como $f(x)=-2x^2+x+3$ es una parábola cóncava hacia abajo, será negativa en $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, que coincide con la solución de la inecuación.

c) $\dfrac{x^2-4}{x+1}\leq 0 \Rightarrow \dfrac{(x+2)(x-2)}{x+1}\leq 0$. En numerador se anula si $x = -2$, $x = 2$, y el denominador si $x = -1$.

Estudiamos el signo:

Valores de x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signo de $\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+1}$	–	= 0	+	No se puede dividir por cero	–	= 0	+

La solución está formada por $(-\infty,\ -2]\cup(-1,\ 2]$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1. Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{2}$

c) $h(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 4x}$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x^2 + x + 1}$

d) $i(x) = \dfrac{\sqrt{3 - x}}{x + 6}$

a) $D(f) = \mathbf{R}$.

b) El denominador no se anula nunca. El radicando es positivo o cero si $x \geq 1 \Rightarrow D(g) = [1, +\infty)$.

c) El denominador se anula si $x = 0$ o si $x = -4 \Rightarrow D(h) = \mathbf{R} - \{0, -4\}$.

d) El denominador se anula si $x = -6$. El radicando es positivo o cero si $x \leq 3 \Rightarrow D(i) = (-\infty, -6) \cup (-6, 3]$.

8.2. Calcula el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 + x - 6$

b) $g(x) = 2x^3 - 3$ **si** $-2 < x < 4$

a) La gráfica de $f(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba; así pues, los valores de $f(x)$ son mayores o iguales que la ordenada de su vértice. El vértice es el punto $V\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)$. El recorrido es $R(f) = \left[-\dfrac{25}{4}, +\infty\right)$.

b) La función $g(x)$ es creciente, ya que su derivada, $g'(x) = 6x^2$, es siempre positiva o cero.
Así pues, $R(g) = [f(-2), f(4)] = [-19, 125]$.

8.3. Un psicólogo introduce repetidas veces una rata en un laberinto para estudiar su capacidad de aprendizaje. Ha observado que el tiempo, en minutos, que tarda en recorrerlo en el intento *x* viene dado por la fórmula:

$$T(x) = 4 + \frac{12}{x}$$

a) Calcula el dominio de *T*(*x*) en este contexto.

b) ¿Puede la rata tardar menos de 4 minutos en realizar el trayecto?

c) Calcula el recorrido de la función en su contexto.

a) $D(T) = 1, 2, 3, 4, 5\ldots$

b) $T(x) = 4 + \dfrac{12}{x} > 4$; así pues, una rata siempre tardará más de 4 minutos en recorrerlo.

c) $R(T) = \{T(1) = 16, T(2) = 10, T(3) = 8, T(4) = 7\ldots\}$

8.4. Halla los puntos de corte con los ejes y estudia el signo de la función:

a) $f(x) = (x - 1)(x + 1)^2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$

a) Basta estudiar el signo de $(x - 1)$, teniendo en cuenta que $(x + 1)^2 \geq 0$ y que la función se anula en $x = -1$ y $x = 1$.
Así pues, la función es negativa en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y positiva en $(1, +\infty)$.
Corta al eje *X* en los puntos $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$. Corta al eje *Y* en el punto $C(0, f(0)) = C(0, -1)$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = \dfrac{(x + 4)(x - 4)}{(x + 2)(x - 2)}$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
Signo de f	+	= 0	–	$\notin D(f)$	+	$\notin D(f)$	–	= 0	+

Así pues, la función es positiva en $(-\infty, -4) \cup (-2, 2) \cup (4, +\infty)$ y negativa en $(-4, -2) \cup (2, 4)$.
Corta al eje *X* en los puntos $A(-4, 0)$ y $B(4, 0)$. Corta al eje *Y* en el punto $C(0, f(0)) = C(0, 4)$.

8.5. ¿Cuáles de estas funciones son simétricas?

a) $f(x) = -2x^3 + x - 1$ **b)** $f(x) = \ln x^2$

a) $f(-x) = -2(-x)^3 + (-x) - 1 = 2x^3 - x - 1$. No tiene simetría par ni impar.

b) $f(-x) = \ln(-x)^2 = \ln x^2 = f(x)$. Tiene simetría par.

8.6. Calcula el período de la función $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$.

$f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{1}{3}(x + 6\pi)\right) = f(x + 6\pi)$. El período es $T = 6\pi$.

8.7. Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2}$

a) Asíntotas verticales: $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = \dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+2)(x-2)}$. El denominador se anula si $x = -2$ o si $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = -\infty$. La recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Ya no es necesario hallar el otro límite lateral.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = +\infty$. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal por ambos lados.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

b) Asíntotas verticales: El denominador de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{1}{(x+1)(x-3)}$ se anula si $x = -1$ o si $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{(x+1)(x-3)} = +\infty$. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{(x+1)(x-3)} = -\infty$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x-3)} = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x-3)} = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por ambos lados.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

c) Asíntotas verticales: El denominador de $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$ se anula si $x = 1$ o si $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x(x+3)}{(x-2)} = -4$. No hay asíntota vertical en $x = 1$. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = +\infty$. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: Hacemos la división que indica la expresión de la función y obtenemos:

$f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2} = x + 5 + \dfrac{10x - 10}{x^2 - 3x + 2}$. La recta $y = x + 5$ es una asíntota oblicua.

d) Asíntotas verticales: El denominador de $f(x)$ se anula si $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2} = +\infty$. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2} = 2$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2} = -2$. La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a más infinito, y la recta $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

8.8. Halla los extremos relativos y estudia la monotonía de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^5 + 5x^3$ **b)** $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

a) La derivada de f es $f'(x) = 15x^4 + 15x^2 = 15x^2(x^2 + 1)$, y se anula si $x = 0$. La derivada siempre es mayor o igual que cero, luego la función es creciente en **R**.

b) La derivada de $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$ es $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}e^{\frac{2x}{x^2+1}}$, que se anula si $x = -1$ o si $x = 1$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty,\ -1)$	–1	(–1, 1)	1	$(1,\ +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

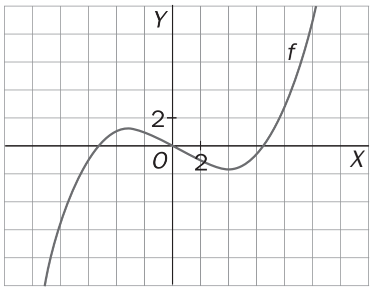
La función es decreciente en $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$ y creciente en (–1, 1).

Tiene un mínimo relativo en el punto $A(-1, f(-1)) = A\left(-1, \frac{1}{e}\right)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $B(1, f(1)) = B(1, e)$.

8.9. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ sabiendo que:

- **$f'(x) > 0$ si $x < -3$ o si $x > 4$**
- **$f'(x) < 0$ si $-3 < x < 4$**
- **$f(-3) < 4$ y $f(4) > -2$**



8.10. (PAU) Una cadena de televisión ha estrenado un nuevo programa para la franja de las 11 a las 15 horas. El *share* o porcentaje de audiencia de la primera emisión vino dado por la siguiente función:

$$S(t) = -t^3 + 36t^2 - 420t + 1596, \quad 11 \le t \le 15$$

expresado el tiempo t en horas. Para que el programa siga en antena, el *share* ha tenido que alcanzar en algún instante el 30%.

a) Indica cuándo creció el *share* y cuándo decreció. ¿Seguirá emitiéndose el programa?

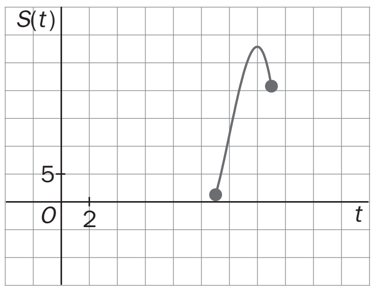
b) Dibuja la gráfica del *share*.

a) La derivada es $S'(t) = -3t^2 + 72t - 420$, que se anula si $t = 10$ o $t = 14$. Como la derivada es una parábola cóncava hacia abajo, es negativa en $(-\infty,\ 10)\cup(14,\ +\infty)$ y positiva en (10, 14). Así pues, el *share* es creciente en [11, 14) y decreciente en (14, 15].

Estudiemos el máximo del *share* en el intervalo [11, 15]. Para ello comparamos:

$S(14) = 28$; $S(11) = 1$; $S(15) = 21$
Así pues, el *share* nunca alcanza el 30% y, por tanto, dejará de emitirse.

b) El dibujo de la gráfica del *share* se muestra a la derecha:



8.11. Estudia la curvatura y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = e^{x^2}$

c) $f(x) = 2x^2 + \ln x$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

Debemos estudiar el signo de la segunda derivada.

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $f''(x) = 12x - 6$. La segunda derivada se anula si $x = \frac{1}{2}$. A su izquierda es negativa y a su derecha es positiva. Por tanto, la función es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. El punto $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ es el punto de inflexión.

b) $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = (4x^2+2)e^{x^2}$. La segunda derivada es siempre positiva y no se anula nunca. La función es cóncava hacia arriba en todo su dominio, **R**, y no tiene puntos de inflexión.

c) El dominio de la función es $D(f) = (0, +\infty)$. $f'(x) = 4x + \frac{1}{x}$, $f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (no pertenece al dominio) o si $x = \frac{1}{2}$. Estudiemos su signo:

x	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
Signo de f''	–	= 0	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Tiene un punto de inflexión en $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \ln 2\right)$.

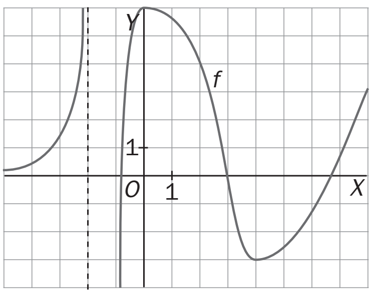
d) El dominio de la función es $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$. $f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$, $f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$. La derivada segunda no se anula nunca; por tanto, la función no tiene puntos de inflexión. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
Signo de f''	–	$\notin D(f)$	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo		Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$.

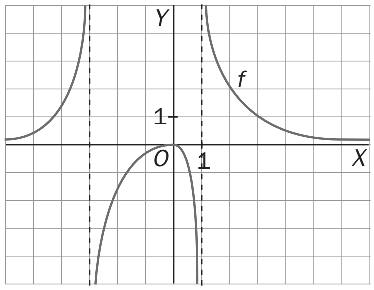
8.12. Representa una función que verifique:

- **Es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ u $(4, +\infty)$ y decreciente en $(0, 4)$.**
- **Sus extremos relativos son $A(0, 6)$ y $B(4, -3)$.**
- **$f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$.**



8.13. Representa una función que reúna todas estas características:

- **$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$**
- **La recta $x = -3$ es una asíntota vertical.**
- **Crece en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.**
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **;** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- **$f'(x) < 0$ si $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$**



8.14. Representa la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8}$.

I. Dominio. Es una función polinómica $\Rightarrow D(f) = \mathbf{R}$.

II. Corte con los ejes. La gráfica de $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8} = \dfrac{x^2(6 - x^2)}{8}$ corta al eje X en los puntos $O(0, 0)$, $A\left(-\sqrt{6}, 0\right)$ y $B\left(\sqrt{6}, 0\right)$. Corta al eje Y en el $O(0, 0)$. Es una función par: simétrica respecto al eje Y.

III. Límites en el infinito. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

IV. Información extraída de la primera derivada. $f'(x) = \dfrac{12x - 4x^3}{8} = \dfrac{x(3 - x^2)}{2}$

La derivada se anula si $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Estudiemos su signo:

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
Signo de *f* ′	+	= 0	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de *f*	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Tiene máximos relativos en los puntos $C\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right) = C\left(-\sqrt{3}, \dfrac{9}{8}\right)$ y $D\left(\sqrt{3}, \dfrac{9}{8}\right)$.

Tiene un mínimo relativo en el punto $O(0, f(0)) = O(0, 0)$.

V. Información extraída de la segunda derivada. $f''(x) = \dfrac{12 - 12x^2}{8} = \dfrac{3(1 - x^2)}{2}$.

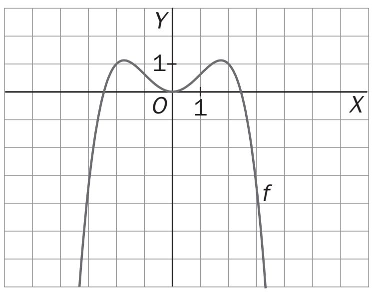
La segunda derivada se anula si $x = -1$ o $x = 1$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -1)$	–1	(–1, 1)	1	$(1, +\infty)$
Signo de *f*″	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de *f*	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia arriba en (–1, 1).

Tiene dos puntos de inflexión:

$E(-1, f(-1)) = E\left(-1, \dfrac{5}{8}\right)$ y $F(1, f(1)) = F\left(1, \dfrac{5}{8}\right)$.



8.15. (PAU) Para la función f: R → R definida de la forma $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, determina:

a) Su monotonía y sus extremos relativos.

b) Su curvatura y sus puntos de inflexión.

c) Su representación gráfica.

a) La derivada, $f'(x) = 24x^2 - 168x + 240 = 24(x^2 - 7x + 10) = 24(x-2)(x-5)$, se anula para $x = 2$ y $x = 5$, que son las abscisas de los puntos susceptibles de ser máximos o mínimos relativos. Estudiemos cómo varía el signo de la derivada en los intervalos definidos por dichos valores:

x	$(-\infty,\ 2)$	2	(2, 5)	5	$(5,\ +\infty)$
Signo de f'	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

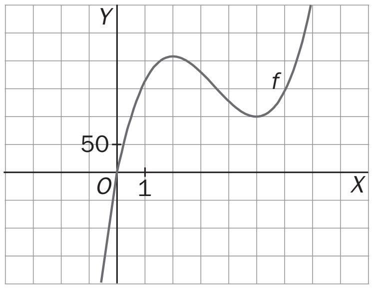
La función es creciente en $(-\infty,\ 2) \cup (5,\ +\infty)$ y decreciente en (2, 5).
Tiene un máximo relativo en el punto $A(2, f(2)) = A(2, 208)$.
Tiene un mínimo relativo en el punto $B(5, f(5)) = B(5, 100)$.

b) La segunda derivada es $f''(x) = 48x - 168$, y se anula si $x = \frac{7}{2}$.

x	$\left(-\infty,\ \frac{7}{2}\right)$	$\frac{7}{2}$	$\left(\frac{7}{2},\ +\infty\right)$
Signo de f''	–	= 0	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,\ \frac{7}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{7}{2},\ +\infty\right)$.

El punto $C\left(\frac{7}{2},\ f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = C\left(\frac{7}{2},\ 154\right)$ es un punto de inflexión.



8.16. (PAU) La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades:

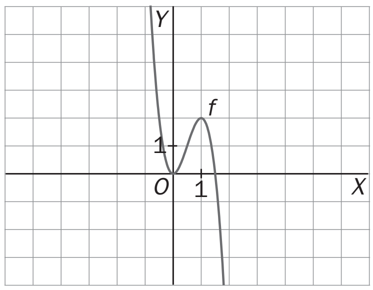
- **Pasa por el punto (0, 0).**
- **Tiene un máximo local en el punto (1, 2).**

a) Obtén el valor de los coeficientes a, b y c.

b) Representa la función.

a) $f(0) = 0$ implica que $f(0) = c = 0$. La función es $f(x) = ax^3 + bx^2$, y su derivada, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.
$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$
$f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2$
Resolviendo el sistema, calculamos los coeficientes: $a = –4$, $b = 6$.
La función es $f(x) = –4x^3 + 6x^2$.

b) La función $f(x) = –4x^3 + 6x^2 = 2x^2(3 – 2x)$ corta a los ejes en los puntos $O(0, 0)$ y $A\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$.
La derivada de la función es $f'(x) = –12x^2 + 12x = 12x(1 – x)$, y se anula si $x = 0$ o si $x = 1$.
Al estudiar el signo de la derivada se observa que en $x = 0$ hay un mínimo relativo, y en $x = 1$, un máximo relativo.
Su gráfica se encuentra a la derecha.



8.17. Representa las siguientes funciones racionales.

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x}$

I. Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$. El denominador se anula si $x = 0$.

II. Corte con los ejes. No corta los ejes. La función es simétrica respecto al origen porque $f(-x) = -f(x)$.

III. Asíntotas verticales. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$; por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$.

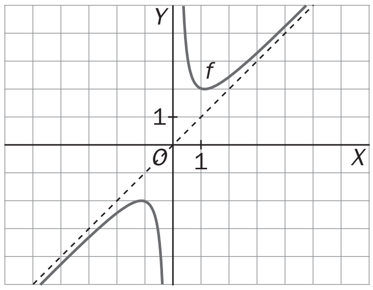
IV. Límites en el infinito. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

La recta $y = x$ es asíntota oblicua, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

V. Información extraída de la primera derivada. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = 0$ solo si $x = 1$, $x = -1$. Así que $P(1, 2)$ es un mínimo relativo, y $Q(-1, -2)$, un máximo relativo. La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

VI. Información extraída de la segunda derivada. $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$. La segunda derivada no se anula nunca y, por tanto, no tiene puntos de inflexión.

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.



b) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

I. Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \{-3\}$. El denominador se anula si $x = -3$.

II. Corte con los ejes. Corta el eje X en el punto $A(3, 0)$ y al eje Y en el punto $B(0, 3)$.

III. Asíntotas verticales. $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{(x-3)^2}{x+3} = -\infty$, la recta $x = -3$ es una asíntota vertical.

Además $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{(x-3)^2}{x+3} = +\infty$

IV. Límites en el infinito. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Si efectuamos el cociente, vemos que $f(x) = x - 9 + \dfrac{36}{x+3}$, por lo que la recta $y = x - 9$ es una asíntota oblicua.

V. Información de la primera derivada. $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x+9)}{(x+3)^2}$. La derivada se anula si $x = 3$ o si $x = -9$.

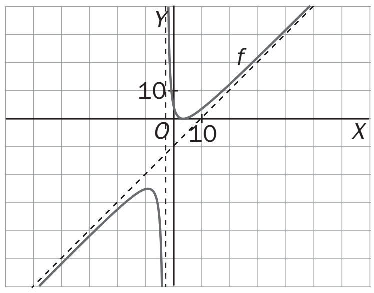
x	$(-\infty, -9)$	-9	$(-9, -3)$	-3	$(-3, 3)$	3	$(3, +\infty)$
Signo de f'	+	= 0	–	$\notin D(f)$	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente		Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función es creciente en $(-\infty, -9) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(-9, -3) \cup (-3, 3)$.

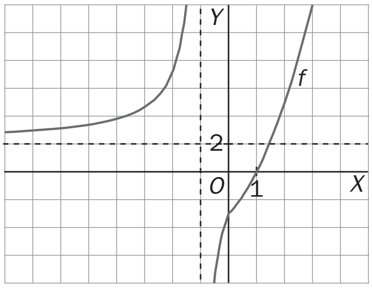
Tiene un máximo relativo en $C(-9, -24)$ y un mínimo relativo en $A(3, 0)$.

VI. Información extraída de la segunda derivada. $f''(x) = \dfrac{72}{(x+3)^3}$.

La segunda derivada no se anula nunca y, por tanto, no tiene puntos de inflexión. La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -3)$ y cóncava hacia arriba en $(-3, +\infty)$.



8.18. Representa la función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+1} & \text{si } x\le 0\\ x^2+2x-3 & \text{si } x>0\end{cases}$



$D(f)$ = **R** – {–1}. La función es continua en x = 0, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-3$.

El primer trozo es una función racional. La recta x = –1 es una asíntota vertical, y la recta y = 2 es una asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito.

El segundo trozo es una parábola cóncava hacia arriba y que corta el eje X en el punto A(1, 0).

8.19. Representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ **b)** $f(x)=1-\sqrt{3-2x-x^2}$

a) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

I. Dominio. Resolviendo la inecuación $x^2-4\ge 0$, $D(f)$ = (–∞, –2] U [2, +∞).

II. Cortes con los ejes. No existe corte con el eje vertical y corta el eje horizontal en A(–2, 0) y B(2, 0). La función es par.

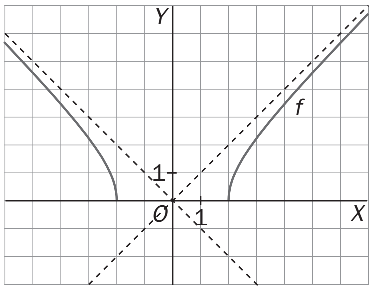
III. Asíntotas verticales. La función no tiene asíntotas verticales.

IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty$, luego no hay asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(-x)^2-4}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{-x}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}(f(-x)+(-x))\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(-x)^2-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\left(\sqrt{1-4/x^2}+1\right)}=0$$



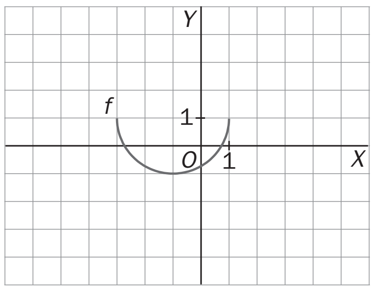
La recta $y=-x$ es asíntota oblicua en –∞. Como la función es par, la recta $y=x$ es la asíntota oblicua en +∞.

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

La derivada en (–∞, –2) U (2, +∞) es $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$, que es negativa en (–∞, –2) y positiva en (2, +∞). Por tanto, la función es decreciente en (–∞, –2) y creciente en (2, +∞).

VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada en (–∞, –2) U (2, +∞) es $f''(x)=\dfrac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$, que es siempre negativa, luego la función es cóncava hacia abajo.

b) $f(x)=1-\sqrt{3-2x-x^2}$



I. Dominio. Resolviendo la inecuación $3-2x-x^2\ge 0$, $D(f)$ = [–3, 1].

II. Corte con los ejes. $f(x)=1-\sqrt{3-2x-x^2}=0\Rightarrow\sqrt{3-2x-x^2}=1$, si $3-2x-x^2=1\Rightarrow x^2+2x-2=0$, cuyas soluciones son $x=-1+\sqrt{3}$ y $x=-1-\sqrt{3}$. Corta el eje Y en el punto $A(0,1-\sqrt{3})$.

III. Asíntotas. No tiene asíntotas.

IV. Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos. La derivada es $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, que se anula si x = –1.

A su izquierda es positiva y a su derecha es negativa. Así pues, la función es decreciente en [–3, –1) y creciente en (–1, 1]. Tiene un mínimo relativo (que también es absoluto) en el punto B(–1, –1).

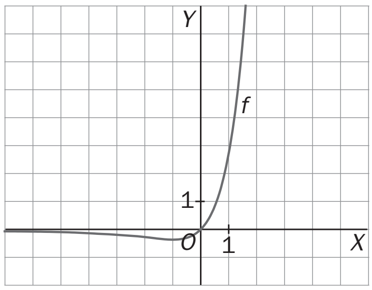
V. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es $f''(x)=\dfrac{4}{(3-2x-x^2)\sqrt{3-2x-x^2}}$, que es siempre positiva, y, por tanto, la función es cóncava hacia arriba.

8.20. Representa las siguientes funciones.

a) $\boldsymbol{f(x) = x\,e^{x}}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-x}}}$

a) $f(x) = x\,e^{x}$

I. Dominio: **R**
II. Cortes con los ejes. La gráfica corta a los ejes en el punto $O(0, 0)$.
III. Asíntotas verticales. La función no tiene asíntotas verticales.
IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$, luego hay una asíntota horizontal $y = 0$ por la izquierda.
V. Monotonia. Máximos y mínimos. $f'(x) = e^{x}(x+1)$,que es negativa en $(-\infty, -1)$ y positiva en $(-1, +\infty)$.
Por tanto, la función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$.
Tiene un mínimo relativo (también es absoluto) en $B\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$.

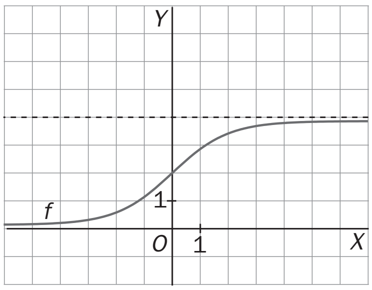


VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es $f''(x) = e^{x}(x+2)$, que en el intervalo $(-\infty, -2)$ es negativa, luego la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo, mientras que en el intervalo $(-2, +\infty)$ es positiva, luego la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
Tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^{2}}\right)$.

b) $f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-x}}$

I. Dominio: **R**
II. Cortes con los ejes. La gráfica corta los ejes en el punto $A(0, 2)$.
III. Asíntotas verticales. La función no tiene asíntotas verticales.
IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{1+e^{-x}} = 0$, luego hay una asíntota horizontal $y = 0$ por la izquierda,
y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{1+e^{-x}} = 4$, luego hay una asíntota horizontal $y = 4$ por la derecha.

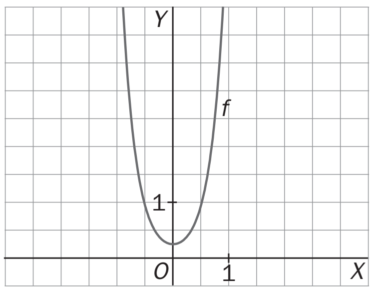
V. Monotonia. Máximos y mínimos. $f'(x) = \dfrac{4e^{-x}}{(e^{-x}+1)^{2}}$, siempre es positiva; por tanto, la función es siempre creciente.



VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es
$f''(x) = \dfrac{4e^{-x}(e^{-x}-1)}{(e^{-x}+1)^{3}}$, que en el intervalo $(-\infty, 0)$ es positiva, luego la función en ese intervalo es cóncava hacia arriba, mientras que en el intervalo $(0, +\infty)$ es negativa, luego la función es cóncava hacia abajo en este intervalo. Tiene un punto de inflexión en $(0, 2)$.

8.21. Cuando un cable se cuelga de dos postes, la curva que forma se llama catenaria. La ecuación de una catenaria es $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{8}}$**. Represéntala gráficamente.**

I. Dominio: **R**
II. Cortes con los ejes. La gráfica corta los ejes en el punto $A\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.
III. Asíntotas verticales. La función no tiene asíntotas verticales.
IV. Comportamiento en el infinito.
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{8} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{8} = +\infty$.
V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. La derivada es
$f'(x) = \dfrac{e^{4x}}{2} - \dfrac{e^{-4x}}{2}$, que en el intervalo $(-\infty, 0)$ es negativa, por tanto la función es decreciente en ese intervalo y en el intervalo $(0, +\infty)$ es positiva, luego la función crece.



VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es $f''(x) = 2e^{4x} + 2e^{-4x}$, que es siempre positiva, luego la función es siempre cóncava hacia arriba.

8.22. Representa la función $f(x) = x^2 \ln(x)$.

I. Dominio: $(0, +\infty)$

II. Cortes con los ejes: $f(x) = x^2\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$.La gráfica corta con el eje horizontal en el punto (1,0),

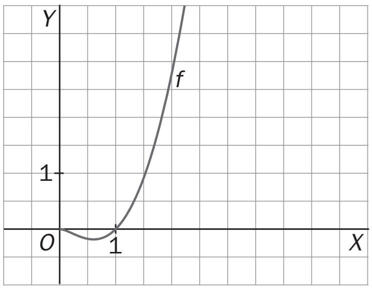
III. No tiene asíntotas verticales

IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x) = +\infty$

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos: La derivada es $f'(x) = 2x\ln(x) + x$, es positiva en $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$, luego la función es creciente en ese intervalo y es negativa en $(0,\ e^{-\frac{1}{2}})$,luego la función es decreciente en ese intervalo. El punto $\left(e^{-\frac{1}{2}}, f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$ es un mínimo absoluto.

VI. Curvatura y puntos de inflexión: La segunda derivada es $f''(x) = 2\ln x + 3$, es positiva en $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, luego la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo y al ser negativa en $\left(0,\ e^{-\frac{3}{2}}\right)$, la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Hay un punto de inflexión $\left(e^{-\frac{3}{2}}, f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$.



8.23. Representa la función $f(x) = \dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x}$.

I. Dominio: $(0, +\infty)$

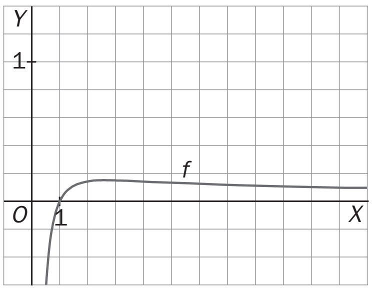
II. Cortes con los ejes: $f(x) = \dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x} = 0 \Rightarrow \ln\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 1$. La gráfica corta el eje horizontal en el punto (1, 0).

III. Asíntotas verticales. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x} = -\infty$, luego $x = 0$ es una asíntota vertical por la derecha.

IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x} = 0$, luego $y = 0$ es una asíntota horizontal por la derecha.

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. La derivada es $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{3x^2}$, que es positiva en $(0, e)$, por tanto la función es creciente en ese intervalo y es negativa en $(e, +\infty)$, la función será decreciente en ese intervalo. Hay un máximo relativo en $(e, f(e)) = \left(e, \dfrac{1}{3e}\right)$.

VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)}{3x^3} - \dfrac{1}{x^3}$, que es positiva en $(e\sqrt{e},\ +\infty)$ luego la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo y es negativa en $(0,\ e\sqrt{e})$ luego la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo. Tiene un punto de inflexión en $\left(e\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e\sqrt{e}}\right)$.



8.24. Representa la grafica de $f(x)=\dfrac{1}{\text{sen}x}$.

I. Dominio: $\mathbf{R} - \{k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$

II. Cortes con los ejes. La gráfica no corta a los ejes en ningún punto.

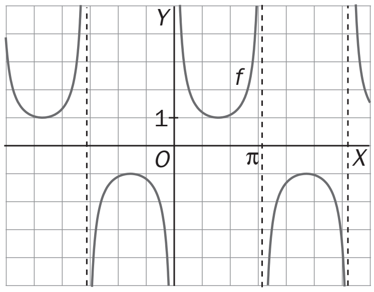
III. Asíntotas verticales. La función tiene asíntotas verticales en aquellos puntos donde se anula el denominador, es decir, las asíntotas verticales son de la forma $x = k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

IV. El período de la función $f(x)$ es 2π.

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. La derivada es $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$. Como la función es periódica de período 2π, la estudiaremos solo en el intervalo $(0, 2\pi)$, $f'(x)=0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

En $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$, $f'(x)$ es negativa; por tanto, $f(x)$ es decreciente en estos intervalos.

En $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right) \cup \left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $f'(x)$ es positiva; por tanto, $f(x)$ es creciente.



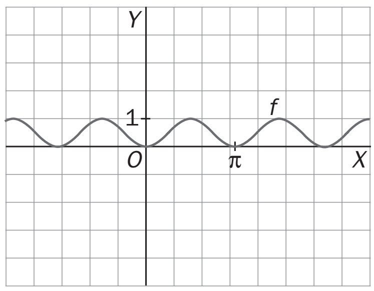
El máximo absoluto está en el punto $x = \dfrac{3\pi}{2}$, y el mínimo, en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es

$f''(x)=\dfrac{2\cos^2 x}{\text{sen}^3 x}+\dfrac{1}{\text{sen}x}$.

En el intervalo $(0, \pi)$, $f''(x)>0$, luego $f(x)$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo y $f''(x)<0$ en $(\pi, 2\pi)$ luego $f(x)$ es cóncava hacia abajo.

8.25. Representa la gráfica de $f(x)=\text{sen}^2 x$.



I. Dominio: **R**

II. La gráfica corta el eje en los puntos $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbf{Z}$.

III. La función no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

IV. El período de la función $f(x)$ es π.

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

La función tiene máximos en los puntos de la forma $\left(\dfrac{2k+1}{2}\pi,1\right)$ y mínimos en los puntos de la forma $(k\pi, 0)$ donde $k \in \mathbf{Z}$.

8.26. Las funciones de oferta (*O*) y demanda (*D*) en función del precio de un producto son:

$$O(p) = 2p - 10 \text{ y } D(p) = \frac{2800}{p}.$$

a) Encuentra el punto de equilibrio y da el precio y el número de unidades correspondientes.

b) Dibuja la gráfica de las funciones de oferta y demanda.

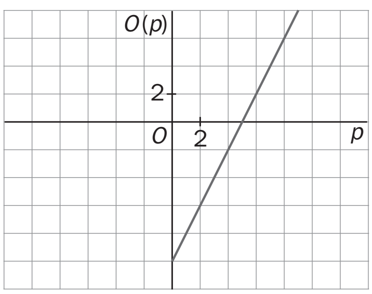
c) ¿Dónde corta la gráfica de la oferta el eje de abscisas? Explica qué significado económico tiene ese punto.

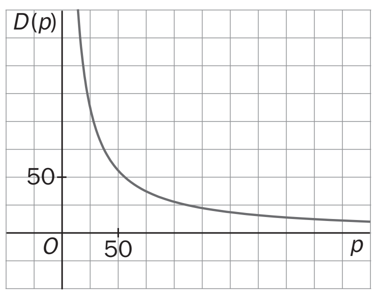
a) El punto de equilibrio se establece cuando $O(p) = D(p)$, es decir, $2p-10=\dfrac{2800}{p} \Rightarrow 2p^2-10p-2800=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 40$ y $p = -35$ (este último resultado no tendría significado en este problema).

Luego el precio del producto sería $p = 40$ y $O(40) = 2 \cdot 40 - 10 = 70$ y $D(40) = \dfrac{2800}{40} = 70$.

b) $O(p) = 2p - 10$ $\qquad$ $D(p) = \dfrac{2800}{p}$





c) La gráfica $O(p)$ corta al eje de abscisas en el punto $x = 5$; esto quiere decir que si el precio del producto es menor que 5, no hay oferta; si el precio es 5, la oferta es nula, y si es mayor que 5, la oferta es positiva.

8.27. (PAU) El tipo de interés anual, *I*(*t*) en %, ofrecido por una entidad financiera depende del tiempo, *t*, en años, que se esté dispuesto a mantener la inversión a través de la expresión $I(t)=\dfrac{90t}{t^2+9}$.

a) Calcula razonadamente cuántos años le conviene pactar a un inversor que trate de optimizar el tipo de interés.

b) Si una inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿el tipo de interés podría llegar a ser negativo? Justifica la respuesta.

a) Para optimizar el tipo de interés hay que buscar el máximo de la función *I*(*t*).

$I'(t)=\dfrac{90(9-t^2)}{(t^2+9)^2}=0 \Rightarrow t=-3$ y $t=3$ (en este problema, $t=-3$ no tiene sentido). Para $t=3$, la función *I*(*t*) tiene un máximo, luego al inversor le conviene pactar 3 años.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{90t}{t^2+9}=0$, luego el tipo de interés no podría llegar a ser nunca negativo porque a muy largo plazo el límite tiende a 0 y *I*(*t*) es positiva para todo $t>0$

EJERCICIOS

Dominio y recorrido

8.28. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+x}$ **c)** $f(x)=\ln\left(x^2-2x-8\right)$ **e)** $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ **g)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2-6x}}{x^2-1}$

b) $f(x)=x-\sqrt{3-2x}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ **h)** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-2}}$

a) El denominador se hace cero si $x^3+x=0\Rightarrow x(x^2+1)=0\Rightarrow x=0$. Así pues, *D*(*f*) = **R** – {0}.

b) El radicando es positivo o cero si $3-2x\geq 0\Rightarrow x\leq\dfrac{3}{2}$. Así pues, $D(f)=\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$.

c) El logaritmo neperiano sólo está definido para valores positivos. $x^2-2x-8>0\Rightarrow(x+2)(x-4)>0$. Así pues, $D(f)=(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$.

d) El radicando es positivo o cero si $\dfrac{x+3}{x-2}\geq 0$

Estudiemos el signo:

x	$(-\infty,-3)$	–3	(–3, 2)	2	$(2,+\infty)$
Signo de *f*	+	= 0	–	$\notin D(f)$	+

Así pues, $D(f)=(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$.

e) *D*(*f*) = **R** – {1}, ya que *x* = 1 anula el denominador del exponente.

f) *D*(*f*) = **R** – {$k\pi$}, *k* = 0, ± 1, ± 2…, ya que el seno se anula para los valores $k\pi$, con *k* entero.

g) El denominador se anula si *x* = –1 o *x* = 1. El numerador se anula si $x^3+x^2-6x=0\Rightarrow x(x+3)(x-2)=0$, es decir, si *x* = 0, *x* = –3, *x* = 2. Estudiemos el signo de *f*:

x	$(-\infty,-3)$	–3	(–3, –1)	–1	(–1, 0)	0	(0, 1)	1	(1, 2)	2	$(2,+\infty)$
Signo de *f*	$\notin D(f)$	= 0	+	$\notin D(f)$	–	= 0	$\notin D(f)$	$\notin D(f)$	$\notin D(f)$	= 0	+

Así pues, $D(f)=[-3,-1)\cup(-1,0]\cup[2,+\infty)$.

h) El denominador se anula si *x* = 2; así pues, *D*(*f*) = **R** – {2}.

Cortes con los ejes, signo, simetrías y periodicidad

8.29. Halla los cortes con los ejes de las funciones:

a) $f(x) = x \ln x$ **b) $f(x) = |2x - 10| - |2 - x|$**

a) $D(f) = (0, +\infty)$. Corte con X: $f(x) = 0 \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(f), \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$.
El único punto de corte con el eje *X* es (1, 0).
No corta el eje *Y* porque $x = 0$ no pertenece al dominio.

b) Corte con *X*, $f(x) = 0$ si $2x - 10 = 2 - x$ o si $2x - 10 = -2 + x$, es decir, si $x = 4$ o si $x = 8$. Los puntos de corte con el eje *X* son *A*(4, 0) y *B*(8, 0). Corte con *Y*: *C*(0, *f*(0)) = *C*(0, 8).

8.30. Estudia el signo de la función $f(x) = (2x - 6)(x + 1)(x^2 + 3)$.

La función se anula si $x = 3$ o $x = -1$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -1)$	–1	(–1, 3)	3	$(3, +\infty)$
Signo de *f*	+	= 0	–	= 0	+

Así pues, *f* es positiva en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, negativa en (–1, 3) y nula en $x = -1$ y en $x = 3$.

Ramas infinitas. Asíntotas

8.31. (PAU) Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$:

a) Especifica su dominio de definición.
b) Estudia su continuidad.
c) Calcula sus asíntotas si las hubiera.

a) El denominador se anula si $x = 1$ o $x = 2$; así pues, $D(f) = \mathbf{R} - \{1, 2\}$.

b) La función es continua si *x* es distinto de 1 y de 2, es decir, es continua en su dominio: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

c) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{(x-2)} = -1$; por tanto, no hay asíntota vertical en $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$; por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.

8.32. Halla todas las asíntotas de las siguientes funciones, estudia el comportamiento de la función con respecto a sus asíntotas e interpreta gráficamente:

a) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^3-2x^2-3x}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ d) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$

a) Asíntotas verticales:

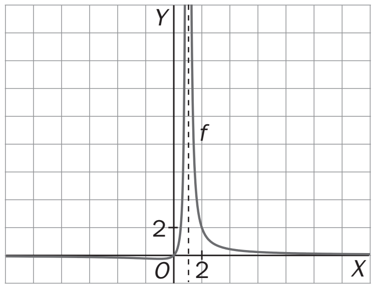
$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{(x-1)^2}=+\infty$; por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{(x-1)^2}=+\infty$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{(x-1)^2}=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{(x-1)^2}=0$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.



b) Asíntotas verticales:

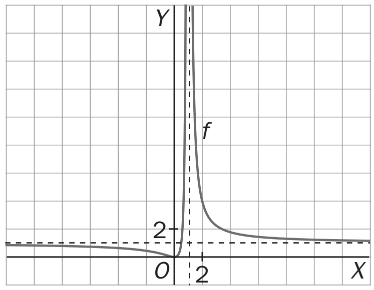
$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=+\infty$; por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=+\infty$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$.

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.



c) Asíntotas verticales:

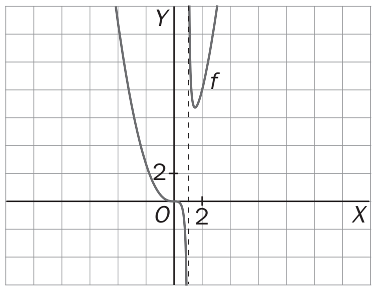
$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x-1}=-\infty$; por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x-1}=+\infty$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x-1}=+\infty$ .No tiene asíntotas horizontales.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.



d) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$; por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$.

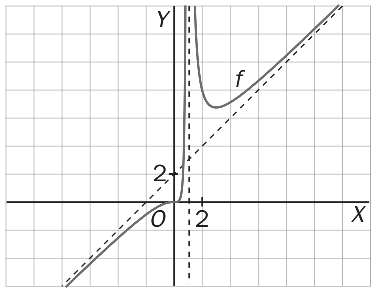
Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$

Asíntotas oblicuas:

Si dividimos, $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}=x+2+\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}$.

La recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua.

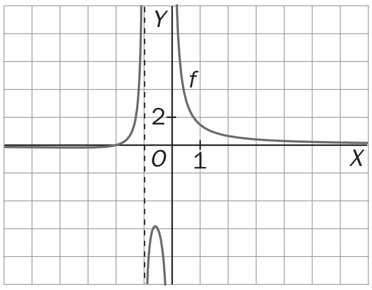


e) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^3-2x^2-3x}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)(x-3)}$

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$; por tanto, la recta x = –1 es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$; por tanto, la recta x = 0 es una asíntota vertical. Además, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.



$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\dfrac{5}{12}$. No hay asíntota vertical en x = 3.

Asíntotas horizontales:

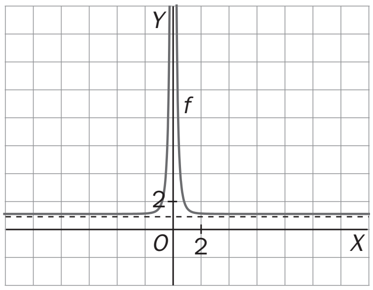
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ .La recta y = 0 es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

f) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$; por tanto, la recta x = 0 es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.



Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=1$.

La recta y = 1 es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

Las derivadas. Monotonía y curvatura

8.33. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x^4}$.

La derivada es $f'(x)=\dfrac{(x-4)e^x}{x^5}$, que se anula si x = 4. Estudiemos su signo sin olvidarnos de x = 0, que no pertenece al dominio:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 4)	4	$(4, +\infty)$
Signo de f'	+	$\notin D(f)$	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente		Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, 0)\cup(4, +\infty)$ y decreciente en (0, 4).

Tiene un mínimo relativo en el punto $A\left(4, \dfrac{e^4}{256}\right)$.

8.34. Estudia la curvatura de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = xe^x$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $f''(x) = 12x - 6$. La segunda derivada se anula si $x = \frac{1}{2}$. A su izquierda es negativa, y a su derecha, positiva. Por tanto, la función es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. El punto $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de inflexión.

b) $f'(x) = (x+1)e^x$, $f''(x) = (x+2)e^x$. La segunda derivada se anula si $x = -2$. A su izquierda es negativa, y a su derecha, positiva. Por tanto, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y cóncava hacia arriba en $(-2, +\infty)$. El punto $A\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ es el punto de inflexión.

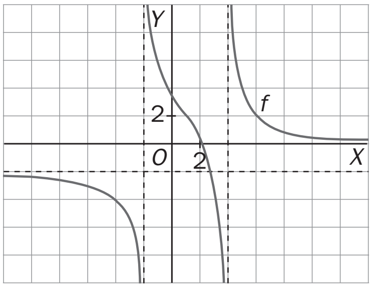
Estudio completo de funciones. Representación gráfica

8.35. Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:

- **Las rectas $x = -2$, $x = 4$, $y = -2$ son sus únicas asíntotas.**
- **Su derivada no se anula nunca y es negativa en todos los puntos en que está definida.**

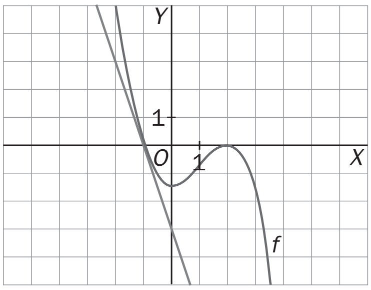
a) ¿Cuántas veces se anula una función con estas propiedades?

b) ¿Puede la derivada segunda no anularse nunca?



a) La función se anula una sola vez, entre $x = -2$ y $x = 4$.
b) La derivada segunda se anula una vez, entre $x = -2$ y $x = 4$.

8.36. (PAU) La curva $y = f(x)$ de la figura tiene como dominio el conjunto de todos los números reales.



a) Determina los puntos donde la función vale 0. Determina los valores de x para los que la función es positiva.

b) Di en qué puntos se anula la derivada y en qué puntos $f'(x) < 0$.

c) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.

d) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$.

e) Determina a sabiendo que $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$.

a) En $x = -1$ y en $x = 2$, la función vale cero: $f(-1) = f(2) = 0$. La función es positiva en $(-\infty, -1)$.
b) La derivada se anula en los puntos con tangente horizontal, $x = 0$ y $x = 2$: $f'(0) = f'(2) = 0$. La derivada es negativa si la función decrece, es decir, en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
c) En $x = 2$, la tangente es horizontal y pasa por el punto $A(2, f(2)) = A(2, 0)$. La recta tangente es $y = 0$.
d) En $x = -1$, la pendiente de la recta tangente es $\frac{6}{-2} = -3$.
Como la recta pasa por el punto $B(-1, f(-1)) = B(-1, 0)$, la ecuación de la tangente es $y = -3x - 3$.
e) Como en la gráfica no se aprecia con exactitud la ordenada de los puntos, salvo en $x = -1$ y en $x = 2$, utilizaremos su derivada. La derivada de $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$ es $f'(x) = a\,((x - 2)^2 + 2(x + 1)(x - 2))$.
Como $f'(-1) = -3$, entonces: $-3 = f'(-1) = a\,((-1 - 2)^2 + 2(-1 + 1)(-1 - 2)) = 9a$, de donde $a = -\frac{1}{3}$.

8.37. (PAU) Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$.

a) Halla sus máximos y mínimos.
b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 6(x^2 - 7x + 10) = 6(x - 2)(x - 5)$, que se anula si $x = 2$ o si $x = 5$.

Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, 2)$	2	(2, 5)	5	$(5, +\infty)$
Signo de f'	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Tiene un máximo relativo en el punto $A(2, f(2)) = A(2, 20)$.
Tiene un mínimo relativo en el punto $B(5, f(5)) = B(5, -7)$.

b) La función es creciente en $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en (2, 5).

8.38. Sea f una función tal que $f'(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$. Obtén las abscisas de los extremos relativos de f, decidiendo qué son.

La derivada se anula para $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$, que son las abscisas de los puntos susceptibles de ser máximos o mínimos relativos. Estudiemos cómo varía el signo de la derivada en los intervalos definidos por dichos valores para dilucidar:

x	$(-\infty, 1)$	1	(1, 3)	3	(3, 5)	5	$(5, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Así pues, en $x = 1$ y en $x = 5$, la función presenta mínimos relativos. En $x = 3$ hay un máximo relativo.

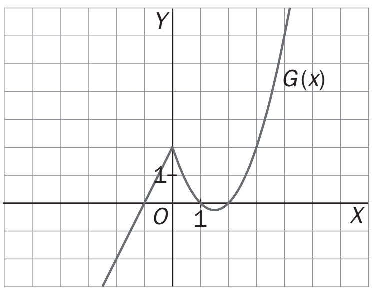
8.39. (PAU) Considera la función: $G(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Dibuja la gráfica.

b) Estudia la continuidad.

c) Determina los extremos relativos.

a) El primer tramo es una semirrecta creciente que pasa por los puntos $A(-1, 0)$ y $B(0, 2)$.
El segundo tramo corresponde a una parábola cóncava hacia arriba, que corta al eje X en los puntos $C(1, 0)$ y $D(2, 0)$.
Su vértice es el punto $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.
Además, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2$. La gráfica es:



b) Observando la gráfica podemos asegurar que la función es continua.
Como intervienen una semirrecta y un trozo de parábola, solo queda estudiar qué ocurre en el punto de solapamiento, $x = 0$:
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x + 2) = 2$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2$, $f(0) = 2$.
Podemos afirmar que la función es continua en $x = 0$ y, por tanto, es continua en todo **R**.

c) Tiene dos extremos relativos, un máximo relativo en el punto de solapamiento $B(0, 2)$ y un mínimo relativo en el vértice de la parábola $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Estudio de funciones racionales

8.40. (PAU) Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, se pide:

a) Calcula su dominio y asíntotas.
b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Haz su representación gráfica aproximada.

a) Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$. El denominador se anula si $x = -1$.

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty$; por tanto, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

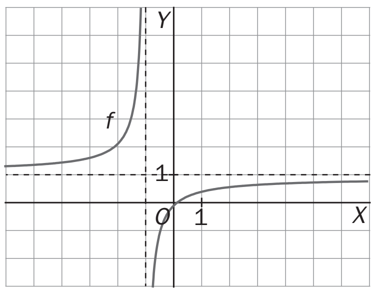
Además, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.

b) La derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, que no se anula nunca y es siempre positiva; por tanto, la función es creciente en todo su dominio: $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. No tiene extremos relativos.

c) La gráfica es:



8.41. (PAU) Estudia y representa la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$.

I. Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$. El denominador se anula si $x = 2$.

II. Corte con los ejes. Corta los ejes X e Y en el punto $O(0, 0)$.

III. Asíntotas verticales. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty$; por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Además, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty$.

IV. Límites en el infinito. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.

V. Información de la primera derivada. $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-2)^3}$. La derivada se anula si $x = 0$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 2)	2	$(2, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	$\notin D(f)$	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente		Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en (0, 2). Tiene un mínimo relativo en $O(0, f(0)) = O(0, 0)$.

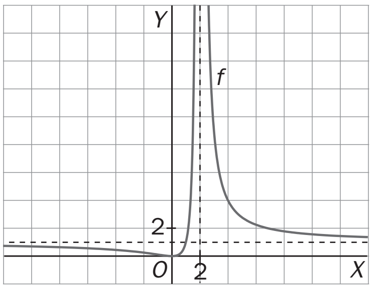
VI. Información extraída de la segunda derivada. $f''(x)=\dfrac{8(x+1)}{(x-2)^4}$. La segunda derivada se anula si $x = -1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2,+\infty)$
Signo de f''	$-$	$= 0$	$+$	$\notin D(f)$	$+$
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba		Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)$ y cóncava hacia arriba en $(-1,2)\cup(2,+\infty)$.

El punto $A(-1, f(-1)) = A\left(-1, \dfrac{1}{9}\right)$ es un punto de inflexión.

VII. Gráfica de la función.



8.42. (PAU) Se considera la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$.

Se pide:

a) Dominio de la función, puntos de corte con los ejes y simetrías.
b) Asíntotas y regiones de existencia de la gráfica
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos, si los hay.
d) Representación gráfica aproximada.

a) Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$. El denominador se anula si $x = -2$ o si $x = 2$.
Corte con los ejes. Corta los ejes X e Y en el punto $O(0, 0)$.
Simetrías. $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x}{x^2-4}=-f(x)$. Es simétrica respecto del origen.

b) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}=-\infty$; por tanto, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Además, $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}=-\infty$; por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función por ambos lados.

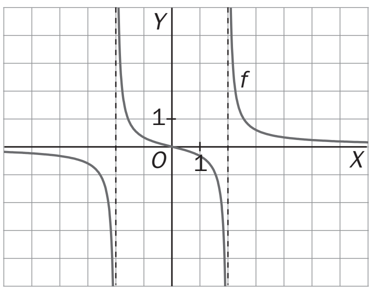
Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

Estudiemos el signo de la función $f(x)=\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2,+\infty)$
Signo de f	$-$	$\notin D(f)$	$+$	$= 0$	$-$	$\notin D(f)$	$+$

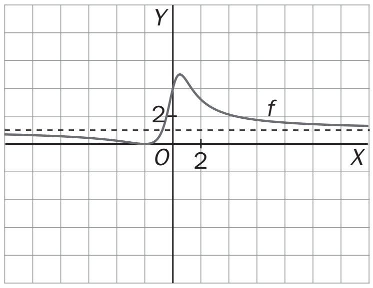
c) La derivada de la función es $f'(x)=\dfrac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$. Esta derivada no se anula nunca y, además, es siempre negativa donde está definida; por tanto, la función no tiene extremos relativos y es decreciente en todo su dominio: $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

d) Gráfica de la función:



8.43. (PAU) Considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}$.

Halla el dominio de definición, los puntos de corte con los ejes, las posibles asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles máximos y mínimos. Haz luego un esquema sencillo de la gráfica de dicha función.



I. Dominio. $D(f)=\mathbf{R}$. El denominador no se anula nunca.

II. Corte con los ejes. La función $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+1}$

corta al eje X en el punto $A(-2, 0)$ y al eje Y en el punto $B(0, 4)$.

III. Asíntotas verticales: No tiene.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1}=1$.

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

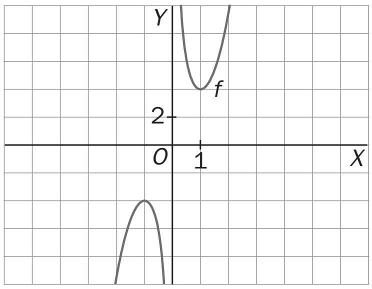
IV. Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos. $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(1-2x)}{(x^2+1)^2}$, que se anula si $x = -2$ o si $x=\dfrac{1}{2}$.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y creciente en $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$. Tiene un mínimo relativo (que es absoluto) en el punto $A(-2, 0)$ y un máximo relativo (que también es absoluto) en $C\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=C\left(\frac{1}{2},5\right)$.

8.44. (PAU) Sea la función $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$.

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*.
c) Estudia su curvatura y sus posibles puntos de inflexión.



a) Dominio. $D(f)=\mathbf{R}-\{0\}$. El denominador se anula si $x = 0$.

Corte con los ejes. La función no se anula nunca, ya que $x^4+3>0$. Así pues, no corta el eje X. Tampoco corta el eje Y, ya que $x = 0$ no está en el domino de la función.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^4+3}{x}=-\infty$; por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Además, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^4+3}{x}=+\infty$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+3}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+3}{x}=+\infty$. Así pues, no tiene asíntotas horizontales.

No tiene asíntotas oblicuas, ya que el grado del numerador no es una unidad mayor que el del denominador.

b) La derivada es $f'(x)=\dfrac{3(x^4-1)}{x^2}$. Se anula si $x = -1$ o si $x = 1$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1,+\infty)$
Signo de f'	+	= 0	–	$\notin D(f)$	–		+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente		Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Tiene un máximo relativo en el punto $A(-1, f(-1)) = A(-1, -4)$ y un mínimo relativo en $B(1, f(1)) = B(1, 4)$.

c) La segunda derivada es $f''(x)=\dfrac{6(x^4+1)}{x^3}$ y no se anula nunca, por lo que no tiene puntos de inflexión.

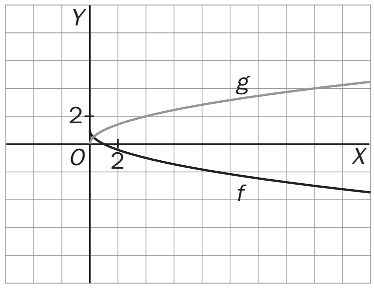
x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ +\infty)$
Signo de f''	–	$\notin D(f)$	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo		Cóncava hacia arriba

Estudio de funciones con radicales

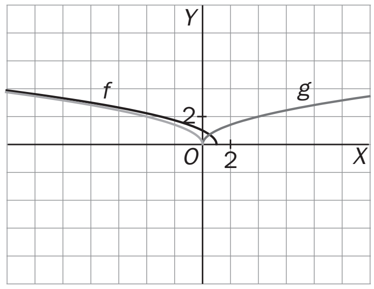
8.45. Esboza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{1 - x}$ **c)** $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ **d)** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

a) La gráfica de la función $f(x)$ se representa a partir de la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x}$ sin más que reflejarla mediante una simetría respecto al eje X y después desplazarla verticalmente una unidad hacia arriba.
Así pues, $D(f) = [0, +\infty)$. La función es continua en su dominio.
Es siempre decreciente. Corta los ejes en los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$.

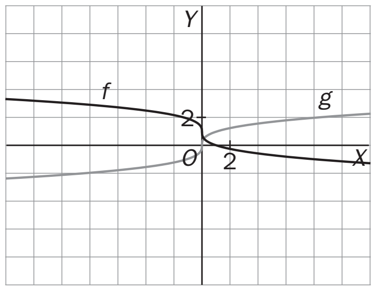


b) La gráfica de la función $f(x)$ se representa a partir de la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x}$. Primero dibujamos su simétrica respecto del eje Y y luego la trasladamos horizontalmente una unidad hacia la derecha.
Así pues, $D(f) = (-\infty, 1]$. La función es continua en su dominio.
Es siempre decreciente. Corta los ejes en los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$.

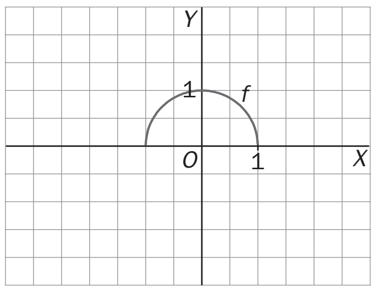


c) Primero dibujamos la gráfica de $g(x) = \sqrt[3]{x}$. A continuación dibujamos su simétrica respecto del eje Y y luego la desplazamos verticalmente una unidad hacia arriba. Así pues, $D(f)$ = **R**. La función es continua en su dominio.

Es siempre decreciente. Corta los ejes en los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$.



d) I. Dominio. Resolviendo la inecuación $1 - x^2 \geq 0$, $D(f) = [-1, 1]$.
II. Cortes con los ejes: Corta los ejes en los puntos $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(0, 1)$. La función es simétrica respecto al eje Y.
III. Asíntotas verticales: La función no tiene asíntotas verticales.
IV. Comportamiento en el infinito: No tiene sentido estudiarlo.
V. Crecimiento y decrecimiento: Máximos y mínimos.
La derivada en $(-1, 1)$ es $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, que se anula en $x = 0$.
A su izquierda es positiva, y a su derecha, negativa. Así pues, la función es creciente en $(-1, 0)$ y decreciente en $(0, 1)$. El punto $C(0, 1)$ es un máximo relativo y también absoluto.

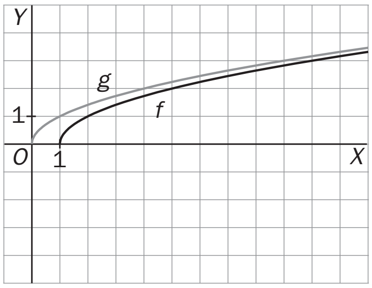


VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada en $(-1, 1)$ es $f''(x) = \dfrac{-1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$, que es siempre negativa, luego la función es cóncava hacia abajo.

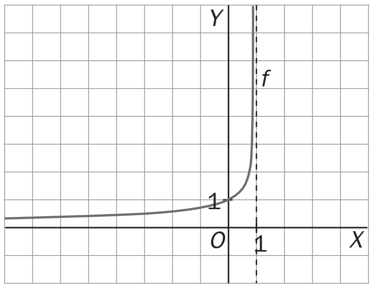
8.46. Representa las funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

a) La gráfica de la función $f(x)$ se representa a partir de la gráfica de la función $g(x)=\sqrt{x}$, sin más que trasladarla horizontalmente una unidad hacia la derecha. Así pues, $D(f)=[1,+\infty)$. La función es continua en su dominio. Es siempre creciente. Corta el eje X en el punto $A(1, 0)$.



b) $D(f)=(-\infty,1)$. La recta x = 1 es una asíntota vertical, y la recta y = 0 es una asíntota horizontal.



Estudio de funciones exponenciales

8.47. Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2\left(1-e^{x}\right)}{1+e^{x}}$**.**

Para ello, calcula sus asíntotas; demuestra que es simétrica respecto al origen; demuestra que es siempre decreciente; estudia su curvatura y halla su punto de inflexión.

Asíntotas verticales: No tiene porque es continua en todo **R**.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-2e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{2}{1}=2$; así pues, la recta y = 2 es una asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-2e^{x}}{1+e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{e^{x}}-\frac{2e^{x}}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}+\frac{e^{x}}{e^{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{e^{x}}-2}{\frac{1}{e^{x}}+1}=\dfrac{-2}{1}=-2$; así pues, la recta y = –2 es una asíntota horizontal cuando x tiende a más infinito.

$f(-x)=\dfrac{2-2e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{2-\frac{2}{e^{x}}}{1+\frac{1}{e^{x}}}=\dfrac{2e^{x}-2}{e^{x}+1}=-\dfrac{2-2e^{x}}{e^{x}+1}=-f(x)$.

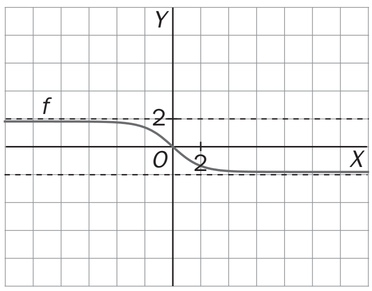
La función es simétrica respecto al origen.

La derivada es $f'(x)=\dfrac{-2e^{x}(1+e^{x})-(2-2e^{x})e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}=\dfrac{-2e^{x}(1+e^{x}+1-e^{x})}{(1+e^{x})^{2}}=\dfrac{-4e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}$, que es siempre negativa; por tanto, f es siempre decreciente.

La segunda derivada es $f''(x)=\dfrac{4e^{x}(e^{x}-1)}{(1+e^{x})^{3}}$ y se anula si x = 0.

A la izquierda de x = 0 es negativa y a su derecha es positiva. Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$ y cóncava hacia arriba en $(0,+\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $O(0, f(0)) = O(0, 0)$.

La gráfica es la que se muestra.



8.48. Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, se pide:

a) Halla su dominio.
b) Demuestra que es siempre positiva.
c) Demuestra que es simétrica respecto al eje *Y*.
d) Realiza un estudio completo de sus posibles asíntotas.
e) Encuentra su máximo y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
f) Encuentra sus puntos de inflexión y estudia su curvatura.
g) Dibuja su gráfica.

a) Dom(f) = **R**.

b) La función es siempre positiva porque se trata de una exponencial.

c) La función es par porque $f(-x) = f(x)$; por tanto, es simétrica respecto al eje Y.

d) No tiene asíntotas verticales ni oblicuas, pero sí horizontales, ya que:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, es decir, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal tanto en más infinito como en menos infinito, ya que es simétrica respecto al eje Y.

e) Su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot(-x)=-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x = 0$. Para valores negativos de x es positiva, y para valores positivos, negativa. Así pues, f es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo (que es también absoluto) en el punto (0, f(0)) = $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

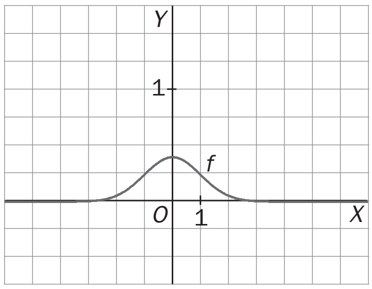
f) Su derivada segunda es $f''(x)=\dfrac{(x^2-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x = -1$ y $x = 1$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
Signo de f''	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$.

Tiene dos puntos de inflexión en $\left(-1, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ y en $\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$.

g) La gráfica de la función es la que se muestra.
Esta función es la distribución normal de media 0 y desviación típica 1, N(0, 1), también llamada normal estándar.
Su gráfica se conoce con el nombre de campana de Gauss.



8.49. (PAU) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y los mínimos, de la función $f(x) = x^2e^{-x}$.

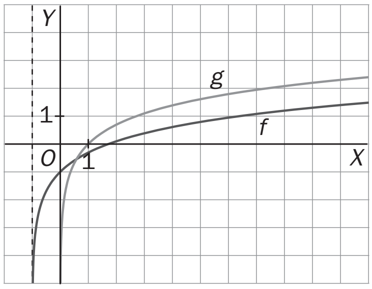
El dominio de la función es todo **R**.
La derivada es $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$. La derivada se anula si $x = 0$ o si $x = 2$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 2)	2	$(2, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ y creciente en (0, 2).
Tiene un mínimo relativo (que también es absoluto) en el punto O(0, f(0)) = O(0, 0). Tiene un máximo relativo en el punto A(2, f(2)) = $A\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$.

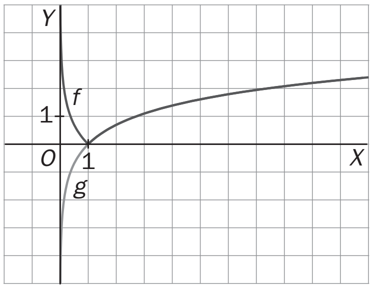
Estudio de funciones logarítmicas

8.50. Representa la función $f(x) = \ln(x+1) - 1$.



Para representar esta función trasladamos una unidad hacia la izquierda la función $g(x) = \ln x$ y después la desplazamos verticalmente hacia abajo una unidad.
La función es continua y creciente en su dominio, $D(f) = (-1, +\infty)$.
Como $f(x) = \ln(x+1) - 1 = 0 \Rightarrow \ln(x+1) = 1 \Rightarrow x+1 = e \Rightarrow x = e-1$, la función corta el eje X en el punto $A(e - 1, 0)$. Corta el eje Y en el punto $B(0, f(0)) = B(0, -1)$.

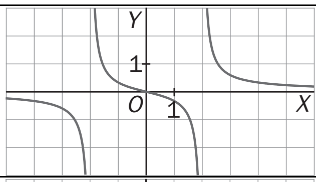
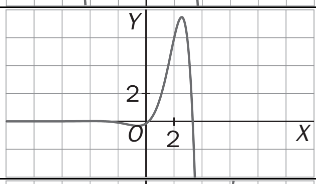
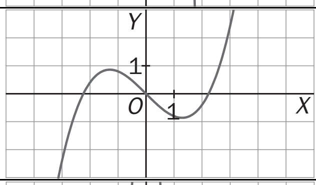
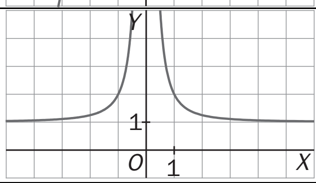
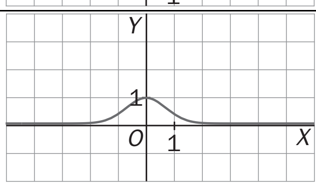
8.51. Haz un estudio completo y representa la función $f(x) = |\ln x|$.



La gráfica de la función $f(x)$ se representa a partir de la gráfica de la función $g(x) = \ln x$ sin más que reflejar su parte negativa mediante una simetría respecto al eje X.
Así pues, $D(f) = (0, +\infty)$. La función es continua en su dominio.
Es decreciente en (0, 1) y creciente en $(1, +\infty)$.
Tiene un mínimo absoluto en el punto $A(1, 0)$, pero no es un punto con tangente horizontal. La función es cóncava hacia arriba en (0, 1) y cóncava hacia abajo en $(1, +\infty)$.

Síntesis

8.52. Asocia cada función de la izquierda con su correspondiente gráfica de la derecha

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$	
$f(x) = \dfrac{x^3}{5} - x$	
$f(x) = e^x \operatorname{sen} x$	

1.ª gráfica: $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

2.ª gráfica: $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

3.ª gráfica: $f(x) = \dfrac{x^3}{5} - x$

4.ª gráfica: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

5.ª gráfica: $f(x) = e^{-x^2}$

8.53. (PAU) Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, *R*(*x*), en euros, viene dada en función de la cantidad que se invierta, *x*, en euros (para $x \geq 10$), por medio de la siguiente expresión: *R*(*x*) = $-0{,}1x^2 + 50x + 250$.

a) Deduce razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.

b) ¿Qué rentabilidad obtendría?

a) Debemos hallar el máximo de *R*(*x*) siendo $x \geq 10$.
La derivada es $R'(x) = -0{,}2x + 50$, que se anula si $x = 250$. Para este valor se consigue el máximo rendimiento, ya que la gráfica de *R*(*x*) es una parábola cóncava hacia abajo.
Es decir, si se invierten 250 euros, se obtiene el rendimiento máximo.

b) $R(250) = 6500$. Se obtiene una rentabilidad de 6500 euros.

8.54. (PAU) La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (*x*, expresado en horas) en los siguientes términos:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x+3} & \text{si } 15 < x \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento de esta función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justifica que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.

b) Justifica que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

a) La función es continua, ya que $\lim\limits_{x \to 15^-} \dfrac{x}{3} = \lim\limits_{x \to 15^-} \dfrac{2x}{0{,}2x+3} = f(15) = 5$.

Por otra parte, el primer tramo de la función es creciente, ya que se trata de una recta de pendiente positiva.

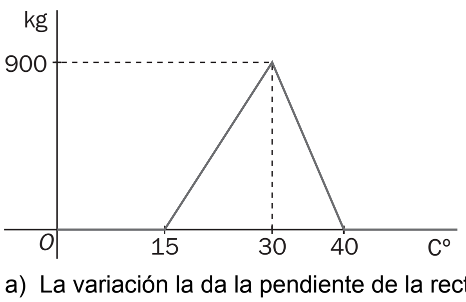
La derivada del segundo tramo, $f(x) = \dfrac{2x}{0{,}2x+3}$, es $f'(x) = \dfrac{6}{(0{,}2x+3)^2}$, que es siempre positiva. Así pues, en este tramo la función también es creciente. Como *G*(*x*) es continua, concluimos que es creciente en todo su dominio.

Si $x < 15$, $G(x) = \dfrac{x}{3} < \dfrac{15}{3} = 5$, es decir, nunca llegará a 5 si estudia menos de 15 horas.

b) Veamos si es posible: como *G*(*x*) es creciente, estudiaremos el límite en el infinito $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{0{,}2x+3} = \dfrac{2}{0{,}2} = 10$.

Es decir, por muchas horas de preparación, jamás se conseguirá una nota de 10.

8.55. (PAU) Un invernadero está destinado al cultivo de tomates. Se sabe que las tomateras solo producen frutos si la temperatura dentro del invernadero está entre 15 ºC y 40 ºC.
En la siguiente gráfica se muestra la producción de tomates en kilogramos, según la temperatura que se mantiene en el invernadero.



a) Si la temperatura está entre 15 ºC y 29 ºC, di qué variación experimenta la producción al aumentar la temperatura 1 ºC. Calcula dicha variación cuando la temperatura está entre 30 ºC y 39 ºC.

b) Define una función a trozos que exprese la producción según la temperatura.

c) Halla las temperaturas para las que se obtiene el 75% de la producción máxima.

a) La variación la da la pendiente de la recta. En el primer caso, entre 15º y 29º, la recta tiene igual pendiente que la recta que une los puntos de abscisas 15º y 30º: $m_1 = \dfrac{900-0}{30-15} = 60$. Entre 30º y 39º, la recta tiene igual pendiente que la recta que une los puntos de abscisas 30º y 40º: $m_1 = \dfrac{0-900}{40-30} = -90$.

b) Como ya conocemos las pendientes de las rectas, resulta: $f(x) = \begin{cases} 60x - 900 & \text{si } 15 \leq x \leq 30 \\ -90x + 3600 & \text{si } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$

c) La producción máxima es de 900 kg, y su 75% es 675.
Si $15 \leq x \leq 30$, $60x - 900 = 675$, lo que implica que $x = 26{,}25$º.
Si $30 \leq x \leq 40$, $-90x + 3600 = 675$, lo que implica que $x = 32{,}5$º.
Así pues, a 26,25º y a 32,5º se consigue el 75% de la producción máxima.

8.56. (PAU) La producción de cierta hortaliza en un invernadero, $Q(x)$ en kg, depende de la temperatura, x, en ºC, según la expresión: $Q(x) = (x + 1)^2 (32 - x)$.

a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

a) La función es $Q(x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 32$ y su derivada es $Q'(x) = -3x^2 + 60x + 63 = 3(x + 1)(21 - x)$, que se anula si $x = -1$ o $x = 21$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 21)$	21	$(21, +\infty)$
Signo de f'	$-$	$= 0$	$+$	$= 0$	$-$
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

Como es natural, suponemos que la temperatura debe ser superior a 0º y, por tanto, la temperatura que asegura la máxima producción es de 21º.

b) $Q(21) = 5324$. Es decir, se producirían 5324 kg de hortalizas.

8.57. (PAU) En un trabajo de investigación sobre el rendimiento (en una escala de 0 a 100) durante 24 horas de funcionamiento de cierta válvula, unos ingenieros industriales han comprobado que dicho rendimiento se comporta de acuerdo con la siguiente función:

$$\boldsymbol{R(t) = \frac{(30 - t)(t + 10)}{4}; \quad 0 \le t \le 24}$$

a) ¿Cuánto debe estar funcionando la válvula para conseguir su máximo rendimiento? Justifica la respuesta.

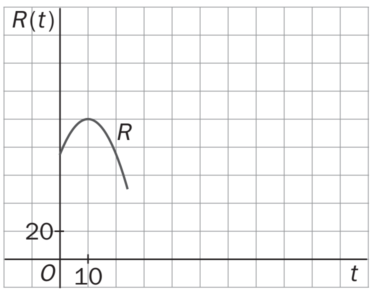
b) Representa y comenta la función.

a) La gráfica de la función es una parábola cóncava hacia abajo que tiene su máximo en su vértice. Así pues, este será el máximo si su abscisa pertenece al dominio.

La función rendimiento es $R(t) = \dfrac{(30 - t)(t + 10)}{4} = \dfrac{-t^2 + 20t + 300}{4}$; su derivada es

$R'(t) = \dfrac{-2t + 20}{4} = \dfrac{-t + 10}{2}$, que se anula si $t = 10$. Como $t = 10$ pertenece al dominio, podemos afirmar que el máximo rendimiento se alcanza a las 10 horas de funcionamiento de la válvula.

b) El vértice de la parábola es el punto $V(10, R(10)) = V(10, 100)$.
La gráfica es la que se muestra.



La máquina empieza con un rendimiento del 75% (el punto de corte con Y es $A(0, 75)$) y va aumentando hasta conseguir el 100% de rendimiento a las 10 horas.
A partir de ahí va disminuyendo hasta llegar a un rendimiento del 51% ($R(24) = 51$).

PROBLEMAS

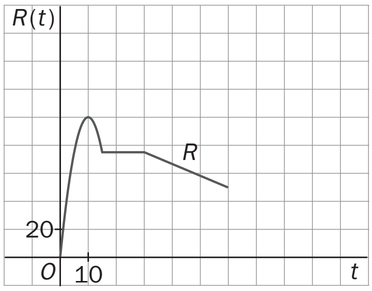
8.58. El rendimiento físico ante determinado esfuerzo muscular (evaluado en una escala de 0 a 100) de cierto deportista de élite durante un tiempo de 60 minutos viene dado a través de la función

$$\boldsymbol{R(t) = \begin{cases} -t(t-20) & \text{si } 0 \le t < 15 \\ 75 & \text{si } 15 \le t < 30 \\ 100 - \dfrac{5t}{6} & \text{si } 30 \le t \le 60 \end{cases}}$$

a) Representa dicha función.

b) Interpreta la gráfica obtenida.

a) El primer tramo es una parábola cóncava hacia abajo; el segundo es una recta horizontal, y el último es una recta decreciente. Es importante calcular los puntos de los extremos de los intervalos y, en su caso, el límite. También calculamos el vértice de la parábola: $V(10, 100)$
La gráfica es la que se muestra.



b) El rendimiento físico va aumentando hasta llegar a su máximo, que se alcanza en el vértice de la parábola, $V(10, 100)$
Así, a los 10 minutos se consigue el 100% de rendimiento. Después decrece hasta llegar a los 15 minutos, que se mantiene estable en un 75% hasta llegar a los 30 minutos, y a partir de aquí decrece paulatinamente hasta llegar al 50%, al final del esfuerzo, a los 60 minutos.

8.59. (PAU) Un importador de caviar estima que si vende el kilogramo de caviar a *x* euros, entonces su beneficio por Kilogramo viene dado por la función $\boldsymbol{B(x) = 160x - x^2 - 6300}$.

a) Indica entre qué precios obtiene beneficios el importador.

b) Calcula a qué precio debe vender el kilo de caviar para obtener un beneficio máximo.

c) Calcula el beneficio máximo por kilo.

a) La función $B(x) = 160x - x^2 - 6300$ corta el eje X en los puntos $A(70, 0)$ y $B(90, 0)$. Como la función beneficio es una parábola cóncava hacia abajo, será positiva entre $x = 70$ y $x = 90$. Así pues, se obtienen beneficios si el precio de venta del kilo de caviar está comprendido entre 70 y 90 euros.

b) La función beneficio es una parábola cóncava hacia abajo, por lo que el máximo se encuentra en su vértice, cuya abscisa es el valor que anula la derivada, $B'(x) = 160 - 2x = 0 \Rightarrow x = 80$. Si vende el kilo de caviar a 80 euros, obtiene el beneficio máximo.

c) $B(80) = 100$. Es decir, el beneficio máximo por kilo es de 100 euros.

8.60. (PAU) Las ganancias de una empresa, en miles de euros, se ajustan a la función $f(x)=\dfrac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x > 0$.

a) Representa gráficamente la función $y = f(x)$ para $x\in(-\infty,+\infty)$, indicando: dominio, corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento.

b) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?

c) A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

a) Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$. El denominador se anula si $x = -\dfrac{5}{2}$.

Corte con los ejes. Corta el eje Y en el punto $A(0, f(0)) = A(0, -20)$ y el eje X en el punto $B(2, 0)$.
Asíntotas verticales:

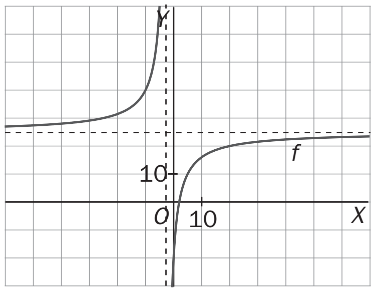
$\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}^-}\dfrac{50x-100}{2x+5}=+\infty$; por tanto, la recta $x = -\dfrac{5}{2}$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Además, $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{2}^+}\dfrac{50x-100}{2x+5}=-\infty$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{50x-100}{2x+5}=25$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50x-100}{2x+5}=25$.
La recta $y = 25$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

Crecimiento y decrecimiento. La derivada es $f'(x)=\dfrac{450}{(2x+5)^2}$, que no se anula nunca y es siempre positiva; por tanto, la función es creciente en todo su dominio: $\left(-\infty,-\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

No tiene extremos relativos.



b) La empresa deja de tener pérdidas a partir del segundo año; a partir de $x = 2$, la función es positiva.

c) Los beneficios están limitados por 25 000 euros, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50x-100}{2x+5}=25$.

8.61. (PAU) La capacidad de concentración de una atleta de sato de altura en una competición de 3 horas de duración viene dada por la función $f:[0,3]\to \mathbf{R}$ dada por $f(t)=300t(3-t)$, donde t mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?

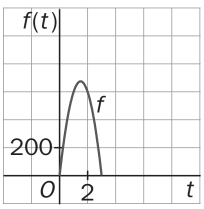
b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

c) Representa gráficamente la función de capacidad de concentración.

a) $f'(t) = 300(3-t) - 300t = -600t + 900$, se anula si $t=\dfrac{3}{2}$. Así pues, en $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$, $f'(t) > 0$, por lo que la capacidad de concentración, $f\,t)$, aumenta, mientras que en $\left(\dfrac{3}{2},3\right)$, $f'(t) < 0$, la capacidad de concentración disminuye. $f(t) = 0$ si $t = 0$ o si $t = 3$, o sea, al comenzar y al terminar la competición.

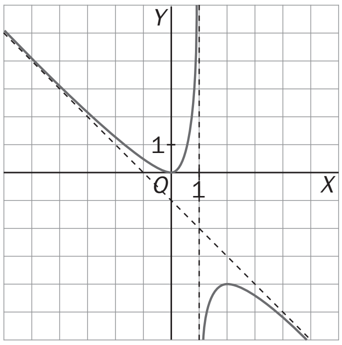
b) El instante en el que la capacidad de concentración es máxima, que es en $t=\dfrac{3}{2}$, máximo de f en [0, 3].

c)



PROFUNDIZACIÓN

8.62. La curva de la figura representa la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$. Obtén los números reales *a, b, c, d, e.*



Como $f(0) = 0$, $c = 0$. Y como la recta $x = 1$ es una asíntota vertical, el denominador se anula para $x = 1$ y por tanto, $d = -e$. Así pues, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{dx-d}=\dfrac{1}{d}\cdot\dfrac{ax^2+bx}{x-1}=\dfrac{1}{d}\left(ax+a+b+\dfrac{a+b}{x-1}\right)$, con lo que la recta

$y=\dfrac{1}{d}(ax+a+b)$ es asíntota oblicua, que, al observar el dibujo, vemos que debe ser la recta $y = -x - 1$, por lo que $\dfrac{a}{d} = -1$ y $\dfrac{a+b}{d} = -1$, es decir, $b = 0$ y $d = -a$. La función será, por tanto, $f(x)=\dfrac{ax^2}{a-ax}=\dfrac{x^2}{1-x}$, pues, evidentemente, a no puede ser 0.

8.63. Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ obteniendo previamente sus elementos más significativos y comprueba que alcanza el máximo absoluto en el punto de abscisa *e*. A la vista de la gráfica, ¿qué es mayor: $\dfrac{1}{e}$ o $\dfrac{\ln\pi}{\pi}$? Deduce que $e^{\pi}>\pi^{e}$.

La gráfica de f corta el eje de ordenadas si $f(x) = 0$, es decir, si $\ln x = 0$, o sea, si $x = 1$.

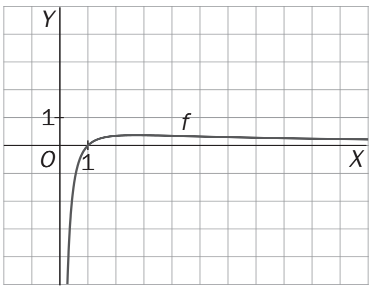
Por otra parte, solo está definida en $(0, +\infty)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Como $f'(x)=\dfrac{x\dfrac{1}{x}-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$ solo si $x = e$, ya podemos esbozar su gráfica.

Así pues, la función es decreciente en $(e, +\infty)$, o sea, $f(e) > f(\pi)$, es decir,

$\dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}\Leftrightarrow \pi\ln e > e\ln\pi \Leftrightarrow \ln e^{\pi} > \ln \pi^{e}$, y como la función logaritmo es creciente, concluimos que $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Nota: Una extensión curiosa de este resultado es decidir qué es mayor, a^b o b^a si $0 < a < b$. El mismo argumento que hemos utilizado lleva a afirmar que si $0 < a < b \le e$, entonces $a^b < b^a$, y si $e \le a < b$, entonces $a^b > b^a$.



8.64. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, cociente de polinomios, y tal que admite como asíntota a la recta $y = x - 1$. Algunas de las siguientes afirmaciones son verdaderas y otras falsas. Justifica cómo es cada una.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) Existe $a \geq 0$ tal que para todo $x \geq a$ se verifica que $f(x) \geq 5$.

d) Existe $b \geq 0$ tal que para todo $x \geq b$ se verifica que $f(x) \leq 5$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = 0$

a) Verdadera: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$

b) Verdadera: $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(x-1)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$

c) Verdadera, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

d) Falsa, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

e) Falsa: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x+1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x) = -1$

8.65. Sea f una función definida en R, decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, +\infty)$ con $f(0) = 1$. ¿Cuáles de las siguientes expresiones podrían ser una fórmula para f?

a) $f(x) = |x| + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{|x|+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

d) $f(x) = \ln(x^2+1) + 1$

e) $f(x) = e^x - x$

En primer lugar se observa que todas estas funciones cumplen que $f(0) = 1$. Estudiemos su monotonía.

a) Para estudiar su monotonía, definimos la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Su derivada para x distinto de cero es $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Por tanto, f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Sí es una fórmula para f.

b) $f(0) = 1$. Para estudiar su monotonía, definimos la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{-x+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Su derivada para x distinto de cero es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-(x^2-2x-1)}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Si $x > 0$, la derivada se anula si $x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} - 1, \quad x = -\sqrt{2} - 1$. Estudiando el signo de la derivada se observa que si $x \in (0, \sqrt{2} - 1)$, la derivada es negativa, y, por tanto, la función f es decreciente. Así pues, f no es creciente en $(0, +\infty)$.

c) La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, que es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Por tanto, f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Sí es una fórmula para f.

d) La derivada es $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, que es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Por tanto, f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Sí es una fórmula para f.

e) La derivada es $f'(x) = e^x - 1$, que se anula si $x = 0$. Esta derivada es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Por tanto, f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Sí es una fórmula para f.

8.66. Considera la función f: R − {0} → R dada por $f(x) = |x| + 1 + \dfrac{\ln|x|}{x^2}$. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

b) Para todo $x > 0$, es $f(x) \geq 0$.

c) El eje de ordenadas es eje de simetría de la gráfica de f.

d) La gráfica de f admite como asíntota la recta $y = x + 1$.

e) La gráfica de f admite como asíntota la recta $y = -x + 1$.

a) Verdadera. Si $x > 0$, la función está definida por $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$.

Para valores muy grandes de x, todos los sumandos de la expresión $f(x)$ son positivos.

b) Falsa. Por ejemplo, si $x = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx -1{,}27$.

c) Verdadera. $f(-x) = |-x| + 1 + \dfrac{\ln|-x|}{|-x|^2} = |x| + 1 + \dfrac{\ln|x|}{x^2} = f(x)$

d) Verdadera. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + 1 + \dfrac{\ln x}{x^2} - (x+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ La recta $y = x + 1$ es una asíntota

e) Verdadera. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (-x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x + 1 + \dfrac{\ln(-x)}{x^2} + x - 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(-x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{(-x)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

8.67. Sea f la función definida por $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$.

a) Calcula el dominio de f y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Prueba que la recta de ecuación $y = 2x + 3$ es asíntota a la gráfica de f en $+\infty$.

c) ¿Es f derivable en 0? ¿Y en 4?

d) Estudia los posibles máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

e) Dibuja las asíntotas y luego la gráfica de f.

a) Como $x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow x(x+4) \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$, o $x \geq 0$, entonces, $D(f) = (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - x + \sqrt{x^2 - 4x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1 - x + \sqrt{x^2 - 4x}\right)\left(1 - x - \sqrt{x^2 - 4x}\right)}{1 - x - \sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{2}{-1-1} = -1$$

b) Debemos probar que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - (2x+3)\right) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x+3)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x} - (x+2)\right)\left(\sqrt{x^2 + 4x} + (x+2)\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x+2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2} = 0.$$

c) La derivada de $f(x)$ para x distinto de 0 y de −4 es $f'(x) = 1 + \dfrac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}} = 1 + \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$.

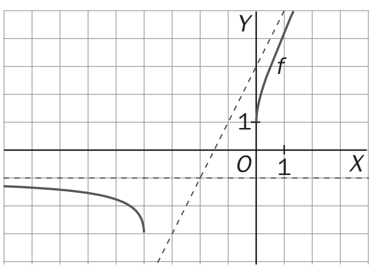
$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+}\left(1 + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\right) = +\infty \text{ ,. } \lim_{x\to-4^-} f'(x) = \lim_{x\to-4^-}\left(1 + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\right) = -\infty$$

Así pues, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$, ni en $x = -4$.

d) La gráfica de f tiene una asíntota horizontal, $y = -1$, cuando x tiende a menos infinito.

Y ya hemos visto que $y = 2x + 3$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f en $+\infty$. Es decreciente en $(-\infty, -4]$ y creciente en $[0, +\infty)$.

e)



8.68. Sea *f* la función definida en $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ por $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) *f* es decreciente en $(-\infty, -1]$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) + x\right) = 1$

d) La recta de ecuación $y = x + 1$ es asíntota en $-\infty$ a la gráfica de *f*.

e) La recta de ecuación $y = x - 1$ es asíntota en $+\infty$ a la gráfica de *f*.

a) Verdadera. La derivada de *f*(*x*) es $f'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$. Para valores de *x* del intervalo

$(-\infty, -1]$, esta derivada es negativa; así pues, *f* es decreciente en $(-\infty, -1]$.

b) Falsa. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{-x} = -1$.

c) Verdadera.

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \frac{2}{1+1} = 1$$

d) Falsa. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}-x-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x-1\right) = +\infty \neq 0$. Como era de esperar, esta recta no es asíntota, ya que por el apartado anterior deducimos que la recta $y = -x + 1$ es una asíntota oblicua en menos infinito.

e) Verdadera.

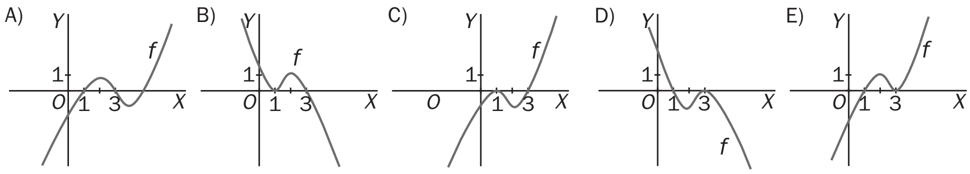
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)\right)\left(\sqrt{x^2-2x-3}+(x-1)\right)}{\sqrt{x^2-2x-3}+(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-3-(x^2-2x+1)}{\sqrt{x^2-2x-3}+(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-2x-3}+(x-1)} = 0$$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

8.1. La gráfica de la función $f(x) = (x-1)(x-3)^2$ podría ser:



La respuesta correcta es la E.

8.2. Si $f(x)$ es una función polinómica de 4.º grado, su gráfica:

A) Tiene que presentar tres puntos con tangente horizontal.

B) Tiene que tener al menos dos puntos máximos o mínimos relativos.

C) Es seguro que presenta algún punto con tangente horizontal.

D) Cortará al menos una vez el eje horizontal.

E) Pueden no coincidir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

A) Es falsa. Por ejemplo, $f(x) = x^4$ solo tiene un punto con tangente horizontal: (0, 0).

B) Es falsa. Sirve el mismo contraejemplo que en A, ya que la función $f(x) = x^4$ solo tiene un mínimo: (0, 0).

C) Es verdadera. Como $f'(x)$ es un polinomio de grado tres y signo $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) \neq$ signo $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$, la función pasa de ser creciente a decreciente al menos una vez y, por tanto, tendrá al menos un extremo relativo.

D) Es falsa. Un contraejemplo es $f(x) = x^4 + 4$.

E) Es falsa por ser un polinomio de grado par.

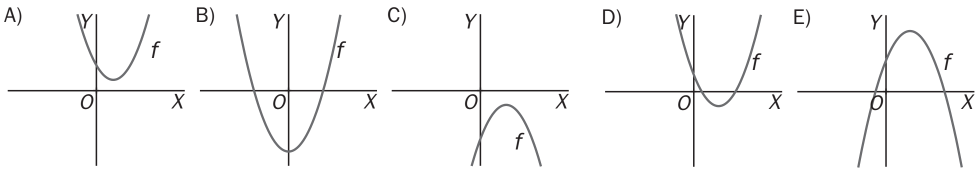
8.3. El número de asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)(x - 3)}$ es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

La respuesta correcta es la E. Las asíntotas de la función son $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $y = 0$.

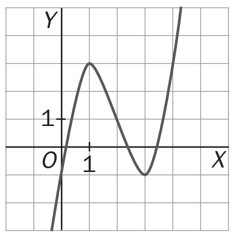
Señala en cada caso las respuestas correctas:

8.4. Si $a > 0$ y $b^2 > ac$, la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ podría ser:



Podemos descartar las gráficas C y E porque son parábolas con las ramas hacia abajo y la condición $a > 0$ no se cumpliría. Las posibles gráficas de la función $f(x)$ son la A y la D. En la gráfica B se tiene que $b = 0$, entonces, para que la condición $b^2 > ac$ se cumpla, se debe tener que $c < 0$.

8.5. Si la gráfica de una función polinómica de 3.^{er} grado $y = f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto de abscisa 1 y un mínimo relativo en el punto de abscisa 3, entonces:



A) Existen números a para los que la ecuación $f(x) = a$ no tiene soluciones reales.

B) No hay ningún número a para el que la ecuación $f(x) = a$ tenga solo dos raíces reales.

C) Si $f(3) < a < f(1)$, la ecuación $f(x) = a$ tiene exactamente tres raíces reales.

D) Si signo $f(1) \neq$ signo $f(3)$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

E) La gráfica de $y = f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

Para resolver este problema es útil trazar la gráfica de una función que verifique las hipótesis.

A) Es falsa. Como una función polinómica de 3.^{er} grado es una función continua y o bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, el recorrido de la función es todo **R** y la ecuación $f(x) = a$ siempre tiene al menos una solución real.

B) Es falsa. Como $(1, f(1))$ es máximo relativo de la función, entonces la ecuación $f(x) = f(1)$ tiene dos soluciones reales ($x = 1$ doble y otra distinta). Lo mismo ocurre con la ecuación $f(x) = f(3)$.

C) Es verdadera. Si $f(3) < a < f(1)$, la ecuación $f(x) = a$ tiene tres soluciones, una menor que 1, otra entre 1 y 3, y la tercera mayor que 3, como se ve en la gráfica.

D) Es verdadera. Si signo $f(1) \neq$ signo $f(3)$, entonces $f(3) < 0 < f(1)$, y estamos en las hipótesis de C.

E) Es verdadera. Los polinomios de 3.^{er} grado son simétricos respecto de su punto de inflexión y, por tanto, la abscisa del punto de inflexión está entre las abscisas de sus extremos relativos.

8.6. Sea $f(x) = e^x P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de tercer grado. Entonces:

A) La gráfica de $y = f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

B) La gráfica de $y = f(x)$ corta al menos tres veces el eje horizontal.

C) Solo hay dos puntos, como mucho, con tangente horizontal.

D) La gráfica de f no puede tener asíntotas oblicuas.

E) En la gráfica de f puede haber simultáneamente asíntotas horizontales y oblicuas.

A) Es falsa. $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x P(x) = 0$ cualquiera que sea $P(x)$.

B) Es falsa. La función vale 0 si $P(x) = 0$ y un polinomio de grado 3 no siempre tiene tres raíces reales.

C) Es falsa. $f'(x) = e^x [P(x) + P'(x)]$ y, como $P(x) + P'(x)$ es un polinomio de tercer grado, puede anularse hasta tres veces.

D) Es verdadera. En $-\infty$ tiene una asíntota horizontal, y en $+\infty$, como $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x P(x)}{x} = +\infty$ cualquiera que sea $P(x)$, no tiene asíntota oblicua.

E) Es falsa. Ver apartado D.

8.7. Considera la función $f(x) = \text{sen}[g(x)]$, siendo $g(x)$ un polinomio de 4.º grado. Entonces:

A) La gráfica de f puede cortar 5 veces el eje horizontal.

B) El máximo número de puntos de la gráfica de f con tangente horizontal es 5.

C) Si $g(x) > \pi$ para todo x real, entonces la gráfica de f no corta el eje horizontal en ningún punto.

D) Si $g'(x) \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq 1$.

E) La gráfica de f es periódica de período 2π.

A) Es cierta. Como $g(x)$ es continua en **R**, sen($g(x)$) cortará infinitas veces el eje horizontal (siempre que $g(x) = k\pi$).

B) Es falsa. Habrá infinitos puntos con tangente horizontal (siempre que $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

C) Es falsa. Por ejemplo, si $g(a) = 2\pi$, sen($g(a)$) = 0.

D) Es cierta. $f'(x) = \cos(g(x))g'(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \cos(g(x)) \Rightarrow \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right| = |\cos(g(x))| \leq 1$, siendo $g'(x) \neq 0$.

E) Es falsa, ya que, por ejemplo, el período de la función $h(x) = \text{sen}(px)$ es $T = \dfrac{2\pi}{p}$,

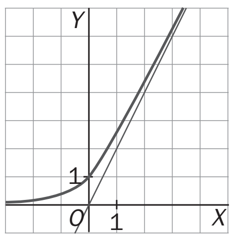
pues $h(x) = \text{sen}(px) = \text{sen}(px + 2\pi) = \text{sen}\left(p\left(x + \dfrac{2\pi}{p}\right)\right) = h\left(x + \dfrac{2\pi}{p}\right)$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

8.8. Sea f una función definida en R.

a) La gráfica de f presenta alguna asíntota horizontal.

b) La gráfica de f presenta alguna asíntota oblicua.



A) $b \Rightarrow a$, pero $a \not\Rightarrow b$

B) $a \Rightarrow b$, pero $b \not\Rightarrow a$

C) $a \Leftrightarrow b$

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior

E) Nada de lo anterior. Hay gráficas de funciones que solo tienen asíntota horizontal; otras que solo tienen asíntota oblicua, y otras que tienen una asíntota oblicua en más infinito y una asíntota horizontal en menos infinito, como se ve en el ejemplo.

Señala el dato innecesario para contestar:

8.9. Para encontrar las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = e^{ax^3+bx^2+cx+d}$ nos dan estos datos:

a) Valor de *a*
b) Valor de *b*
c) Valor de *c*
d) Valor de *d*

A) Puede eliminarse el dato a.
B) Puede eliminarse el dato b.
C) Puede eliminarse el dato c.
D) Puede eliminarse el dato d.
E) No puede eliminarse ninguno.

D) Puede eliminarse el dato *d*. Las abscisas de los extremos relativos son aquellas que anulan la derivada: $f'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^{ax^3+bx^2+cx+d}$. Dicha derivada será cero si $3ax^2 + bx + c = 0$, es decir, no depende del valor de *d*.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar a la cuestión:

8.10. Para probar que la gráfica de $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde *a*, *b* y *c* son reales, corta una sola vez al eje horizontal nos dicen que:

a) $a = 0$
b) $b > 0$

A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola.
B) a es suficiente por sí sola, pero b no.
C) b es suficiente por sí sola, pero a no.
D) Son necesarias las dos.
E) Faltan más datos.

A) Son necesarios ambos datos ($a = 0$ y $b > 0$). La función es $y = x^3 + bx + c$, y sabemos que al menos corta una vez el eje *X*, ya que es un polinomio de grado 3. Su derivada es $y' = 3x^2 + b$, que es siempre positiva, ya que $b > 0$; por tanto, la función es siempre creciente y solo corta una vez el eje *X*.