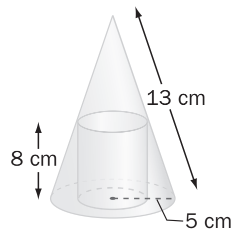
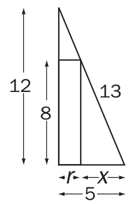
7 Aplicaciones de las derivadas

ACTIVIDADES INICIALES

7.I. Calcula el volumen del cilindro que está inscrito en el cono de la figura:



Aplicando el Teorema de Pitágoras, se calcula la altura del cono: $13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$ cm



Por semejanza de triángulos: $\frac{12}{5} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 5}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$ cm

Para hallar el radio r del cilindro: $r = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$ cm

Luego el volumen del cilindro es: $V = \pi r^2 h = 8\left(\frac{5}{3}\right)^2 \pi$ cm^3

7.II. Calcula el volumen de una esfera cuya área lateral es de 100π m^2.

El radio r de la esfera cumple que: $100\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$ m

El volumen de la esfera será: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500}{3}\pi$ m^3

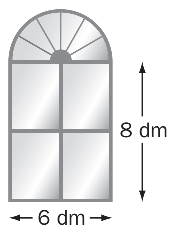
7.III. Calcula el área del triángulo rectángulo de hipotenusa 6 cm, semejante al triángulo rectángulo de catetos 72 cm y 96 cm.

La hipotenusa del triángulo grande es $\sqrt{72^2 + 96^2} = 120$ cm. Así pues, la razón de semejanza es $\frac{120}{6} = 20$.

Los catetos del triángulo pequeño son $\frac{72}{20} = 3{,}6$ cm y $\frac{96}{20} = 4{,}8$ cm.

Por tanto, su área es: $A = \frac{3{,}6 \cdot 4{,}8}{2} = 8{,}64$ m^2

7.IV. Calcula el área de una ventana de Norman, formada por un rectángulo de lados 6 dm y 8 dm, coronada por un semicírculo de diámetro 6 dm.



$$A = 6 \cdot 8 + \frac{\pi \cdot 3^2}{2} \approx 62{,}14 \text{ dm}^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

7.1. ¿Tiene algún extremo relativo la función $f(x) = x^5 + 2x + 1$? ¿Y la función $f(x) = 2\cos x - 4x + 1$?

La derivada de $f(x) = x^5 + 2x + 1$ es $f'(x) = 5x^4 + 2$, que no se anula nunca.
Por tanto, $f(x)$ no puede tener extremos relativos.
La derivada de $f(x) = 2\cos x - 4x + 1$ es $f'(x) = -2\operatorname{sen} x - 4$, que se anulará si $-2\operatorname{sen} x - 4 = 0$, es decir, si $\operatorname{sen} x = -2$, lo cual es imposible.
Así pues, $f(x)$ no tiene extremos relativos.

7.2. Identifica los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$

b) $f(x) = x - \ln(1 + x)$

a) La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 \Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = 2$ o si $x = 3$.
Se estudia el signo de la derivada en los intervalos definidos por 2 y 3, ya que $D(f) = \mathbf{R}$:

x	$(-\infty, 2)$	2	(2, 3)	3	$(3, +\infty)$
Signo de f'	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Así pues, f crece en $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ y decrece en (2, 3). Tiene un máximo relativo en el punto $A(2, f(2))$, es decir, en $A(2, 28)$, y un mínimo relativo en el punto $B(3, f(3))$, es decir, en $B(3, 27)$.

b) El dominio de la función es $D(f) = (-1, +\infty)$. Su derivada es $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, que se anula si $x = 0$.
Se estudia el signo de la derivada en los intervalos en que se divide el dominio al considerar el 0 y el –1, que anula el denominador de la derivada:

x	(–1, 0)	0	$(0, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Así pues, f decrece en (–1, 0) y crece en $(0, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $A(0, f(0)) = A(0, 0)$.

7.3. El producto de dos números positivos es 36. Calcúlalos para que su suma sea lo más pequeña posible.

1. Se definen las variables, x, y, que son los dos números.
2. Se escribe la relación entre ellas: $x \cdot y = 36$, y se despeja una en función de la otra: $y = \frac{36}{x}$.
3. La función que hay que minimizar es la suma de los números, $S = x + y$. Luego $S(x) = x + \frac{36}{x}$.
4. Se halla el dominio de la función. Como x debe ser positivo, es un número del intervalo $(0, +\infty)$.
5. Se calcula el máximo y el mínimo de $S(x) = x + \frac{36}{x}$ en $(0, +\infty)$.

$S'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$. La solución negativa se descarta porque no pertenece al dominio.

6. Se halla el valor de $S(x)$ en el valor que anula la derivada y se compara con el límite en los extremos del intervalo de definición: $S(6) = 12$, $\lim_{x \to 0} S(x) = \lim_{x \to +\infty} S(x) = +\infty$.

Por tanto, el mínimo se alcanza para $x = 6$, con lo que los números serán 6 y 6. Su suma es 12.

7.4. (PAU) Halla las dimensiones de los lados de un triángulo rectángulo, de 10 metros de hipotenusa, para que su área sea máxima. ¿Cuál será dicha área?

1. Sean x e y las longitudes en metros de los catetos.

2. La relación entre las variables es $x^2 + y^2 = 100$, es decir, $y = \sqrt{100 - x^2}$.

3. La función a maximizar es el área del triángulo $A = \dfrac{x \cdot y}{2} \Rightarrow A(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$.

4. Se calcula el dominio de $A(x)$. Como x e y deben ser positivas: $x > 0$ e $y > 0$, es decir,
$y = \sqrt{100 - x^2} > 0 \Rightarrow 100 - x^2 > 0 \Rightarrow 100 > x^2 \Rightarrow 10 > x$. Por tanto, x debe pertenecer al intervalo (0, 10).

5. Se halla el máximo de $A(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$ en (0, 10).

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(100 - x^2) - 2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{4\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\frac{200 - 4x^2}{4\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{50} .$$

Se compara el valor de la función en $x = \sqrt{50}$ con el límite de la misma en los extremos del intervalo de definición para comprobar si es el máximo de la función:

$A\left(\sqrt{50}\right) = 25$

$\lim\limits_{x \to 0} A(x) = \lim\limits_{x \to 10} A(x) = 0$.

El máximo se alcanza para $x = \sqrt{50}$ m, el otro cateto mide $y = \sqrt{100 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{50}$ m y el área máxima es de 25 m^2.

7.5. Una empresa inmobiliaria ha decidido convertir un hotel en 65 estudios. Alquilando a 600 € cada estudio, conseguiría alquilarlos todos, y por cada 20 € que aumente el alquiler, alquilaría 1 menos. Si cada estudio alquilado requiere 60 € mensuales de gastos, ¿a cuánto debe alquilarlos para obtener máximo beneficio?

Llamando x a cada veintena de euros que aumenta el alquiler, la función que da los beneficios es:

$B(x) = (65 - x)(600 + 20x) - 60(65 - x)$, donde $65 – x$ son los estudios que alquila, y $600 + 20x$, el precio de alquiler de cada estudio.

La función beneficio, después de operar, es:

$B(x) = (65 - x)(540 + 20x) = -20x^2 + 760x + 35100$, siendo x un valor comprendido entre 0 y 65 [0, 65].

$B'(x) = -40x + 760$,y los valores de x que la anulan: $-40x + 760 = 0 \Rightarrow x = 19$.

Se compara el valor de la función en ese punto y en los extremos del intervalo de definición: $B(0)$ = 35 100, $B(65)$ = 0, $B(19)$ = 42 320.

Así pues, la función alcanza el máximo en $x = 19$. Por tanto, deberá alquilar $65 – x = 65 – 19 = 46$ estudios a un precio de $600 + 20x = 600 + 20 \cdot 19 = 980$ euros.
El beneficio máximo es de $B(19)$ = 42 320 euros.

7.6. ¿Tiene algún punto de inflexión la función $f(x) = x^4 + 6x^2 - x + 3$?

Se calcula la derivada segunda: $f'(x) = 4x^3 + 12x - 1$, y $f''(x) = 12x^2 + 12$.

La derivada segunda no se anula nunca; por tanto, la función no tiene puntos de inflexión.

7.7. Encuentra los máximos y mínimos relativos de $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

La derivada es $f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1)$, y se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$, y el signo de la misma:

x	$(-\infty, -1)$	–1	(–1, 0)	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función tiene mínimos relativos (que también son absolutos) en los puntos $A(-1, f(-1)) = A(-1, -1)$ y $B(1, f(1)) = B(1, -1)$, y un máximo relativo en el punto $C(0, f(0)) = C(0, 1)$.

7.8. Si $f(x) = x^7 - x^5 - x^4 + 2x + 1$, demuestra que hay algún punto entre –1 y 1 en el que $f'(x) = 2$.

La función cumple el teorema del valor medio en el intervalo [–1, 1], ya que es continua y derivable; así pues, existe un c de (–1, 1) que cumple $f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{(1-1-1+2+1) - (-1+1-1-2+1)}{2} = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$.

7.9. ¿Es posible que haya tres puntos de igual ordenada en la función $f(x) = e^x - x + 5$?

Si hubiera tres puntos a_1, a_2, a_3, con igual ordenada: $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$.
Como la función es continua y derivable, por el teorema de Rolle deben existir dos números distintos c_1 en (a_1, a_2) y c_2 en (a_2, a_3) con derivada nula. Pero esto es imposible, ya que la derivada de la función, $f'(x) = e^x - 1$, solo se anula una vez: $e^x = 1$, es decir, si $x = 0$.

EJERCICIOS

Crecimiento y decrecimiento de una función. Extremos relativos

7.10. (PAU) Estudia la monotonía y halla los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ e) $f(x)=x^3\cdot(x+2)$ g) $f(x)=2x+\dfrac{1}{2x}$ i) $f(x)=\dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1}$

b) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ d) $f(x)=e^{1-x^2}$ f) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ h) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$ j) $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$

En todos los casos hay que estudiar para qué valores se anula la derivada y el signo de la misma en los intervalos definidos por dichos puntos y los que no pertenezcan al dominio.

a) El dominio de $f(x)$ es $D(f)$ = **R** – {–1}. La derivada es $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$. Es siempre positiva, por lo que la función es creciente en todo su dominio y no tiene extremos relativos.

b) El dominio de $f(x)$ es **R**. Su derivada es $f'(x)=\dfrac{2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}=\dfrac{(x+1)e^x(2-(x+1))}{e^{2x}}=\dfrac{(x+1)(1-x)e^x}{e^{2x}}$, que se anula si $(x+1)(1-x)e^x=0\Rightarrow x=-1,\ x=1$.

x	$(-\infty,-1)$	–1	(–1, 1)	1	$(1,+\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y creciente en (–1, 1). Tiene un mínimo relativo, que es también absoluto, en A(–1, 0), y tiene un máximo relativo en $B\left(1,\dfrac{4}{e}\right)$.

c) El dominio de la función es $D(f)$ = **R** – {2}. Su derivada es $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-2)^3}$, que no se anula nunca. Por tanto, la función no tiene extremos relativos.

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signo de f'	+	$\notin D(f')$	–
Comportamiento de f	Creciente	$\notin D(f)$	Decreciente

La función crece en $(-\infty,2)$ y decrece en $(2,+\infty)$. La recta x = 2 es una asíntota vertical.

d) El dominio de $f(x)$ es **R**. Su derivada es $f'(x)=-2xe^{1-x^2}$, que se anula si x = 0. Para valores negativos, la derivada es positiva, la función crece, y para valores positivos, la derivada es negativa, la función decrece. Por tanto, la función es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$. Tiene un máximo relativo, que también es absoluto, en el punto A(0, e).

e) El dominio de $f(x)$ es **R**. Su derivada es $f'(x)=4x^3+6x^2=2x^2(2x+3)$ y se anula si x = 0 o si $x=-\dfrac{3}{2}$.

x	$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente		Creciente

La función es decreciente en $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. Tiene un mínimo en $A\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{27}{16}\right)$.

f) El dominio de $f(x)$ es $(0, +\infty)$. Su derivada, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, se anula si $1 - \ln x = 0$, es decir, si $x = e$.

A la izquierda de e, la derivada es positiva, y a la derecha es negativa. Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$. Tiene un máximo relativo, que también es absoluto, en el punto $A\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$.

g) El dominio de $f(x)$ es $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$. Su derivada es $f'(x)=2-\dfrac{1}{2x^2}$ y se anula si $x = -\dfrac{1}{2}$ o si $x = \dfrac{1}{2}$.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
Signo de f'	+	= 0	–	$\notin D(f')$	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	$\notin D(f)$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función es creciente en $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. Tiene un máximo relativo en el punto $A\left(-\dfrac{1}{2},-2\right)$ y un mínimo relativo en $B\left(\dfrac{1}{2},2\right)$. La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

h) El dominio de $f(x)$ es $D(f) = (0, +\infty)$. La derivada, $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$, se anula si $x = 1$. A la izquierda de 1 es negativa, y a la derecha, positiva. Así pues, la función es decreciente en (0, 1) y creciente en $(1,+\infty)$. Tiene un mínimo relativo (que también es absoluto) en el punto $A(1, 1)$.

i) El dominio de $f(x)$ es $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$. $f'(x)=\dfrac{-x(x-1)^2(x+2)}{(x^2-1)^2}$ y se anula si $x = 0$, $x = -2$.

x	$(-\infty,-2)$	–2	(–2, –1)	–1	(–1, 0)	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	$\notin D(f')$	+	= 0	–	$\notin D(f')$	–
Comportamiento de f	Decrec.	Mínimo relativo	Crec.	$\notin D(f)$	Crec.	Máximo relativo	Decrec.	$\notin D(f)$	Decrec.

La función es decreciente en $(-\infty,-2)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ y creciente en $(-2,-1)\cup(-1,0)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $A(-2, 4)$ y un máximo relativo en el punto $B(0, 0)$. En el punto $x = 1$ hay una discontinuidad evitable porque $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\dfrac{1}{2}$. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

j) El dominio de $f(x)$ es $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$. La función definida a trozos es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{2-x} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{2-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$.

Su derivada, $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(2-x)^2} & \text{si } x<0\\ \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x>0\end{cases}$, no está definida para $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\dfrac{1}{2}$.

Además, si $x \neq 0$, $f'(x)$ no se anula; por tanto, no tiene extremos con tangente horizontal. Su signo:

x	$(-\infty,0)$	0	(0, 2)	2	$(2,+\infty)$
Signo de f'	–	$\notin D(f')$	+		+
Comportamiento de f	Decreciente		Creciente	$\notin D(f)$	Creciente

La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$. En $x = 0$ hay un punto anguloso que es un mínimo relativo. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

7.11. Determina los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 3x^4 - 6x^2$.

La derivada es $f'(x) = 12x^3 - 12x = 12x(x^2 - 1)$, y se anula si $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Su signo:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función tiene mínimos relativos, que también son absolutos en los puntos $A(-1, -3)$ y $B(1, -3)$, y tiene un máximo relativo en el punto $C(0, 0)$.

7.12. (PAU) Determina dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$. Calcula el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5.

La derivada de la función es $f'(x) = 6x - 6$, que se anula si $x = 1$. Como $f''(1) = 6 > 0$, el punto $A(1, f(1))$ es un mínimo relativo, que también es absoluto porque se trata de una parábola cóncava hacia arriba. Tiene que cumplir que $f(1) = 5$; entonces, $3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + a = 5$ y, por tanto, $a = 8$.

7.13. (PAU) Para cada h se considera la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h$.
a) Halla los puntos en los que f alcanza sus valores máximos y mínimos.
b) Encuentra h para que el valor de f en el mínimo local hallado antes sea 0.

a) La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$ y se anula si $x = 0$ o $x = 1$. La segunda derivada es $f''(x) = 12x - 6$. Como $f''(0) = -6 < 0$, el punto $A(0, h)$ es un máximo relativo. Como $f''(1) = 6 > 0$, el punto $B(1, -1 + h)$ es un mínimo relativo.

b) Para que $-1 + h = 0$, debe cumplirse que $h = 1$.

7.14. Localiza los extremos absolutos, si existen, de la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en cada uno de los intervalos indicados:
a) en $(-\infty, +\infty)$ b) $[-3, 0)$ c) en $(-3, 0]$ d) en $[0, 3]$ e) en $(0, 3)$ f) en $(-1, 3]$

La derivada de la función es $f'(x) = 2x + 2$ y se anula si $x = -1$. Si este valor está en el intervalo, se compara $f(-1)$ con el valor de la función en los extremos del mismo; si es cerrado, eligiendo el menor y el mayor. Si los intervalos son abiertos, se calculan los límites de la función en los extremos.

a) Intervalo $(-\infty, +\infty)$: $f(-1) = -2$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
El mínimo absoluto es el punto $A(-1, -2)$. No tiene máximo absoluto.

b) Intervalo $[-3, 0)$: $f(-1) = -2$ $f(-3) = 2$ $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$
El mínimo absoluto es el punto $A(-1, -2)$. El máximo absoluto es el punto $B(-3, 2)$.

c) Intervalo $(-3, 0]$: $f(-1) = -2$, $\lim_{x \to -3} f(x) = 2$, $f(0) = -1$
El mínimo absoluto es el punto $A(-1, -2)$. No tiene máximo absoluto.

d) Intervalo $[0, 3]$: $f(0) = -1$ $f(3) = 14$
El mínimo absoluto es el punto $A(0, -1)$. El máximo absoluto es el punto $A(3, 14)$.

e) Intervalo $(0, 3)$: $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 3} f(x) = 14$
No tiene ni mínimo absoluto ni máximo absoluto.

f) Intervalo $(-1, 3]$: $\lim_{x \to -1} f(x) = -2$, $f(3) = 14$
No tiene mínimo absoluto. El máximo absoluto es el punto $A(3, 14)$.

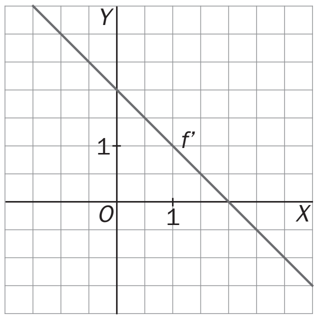
7.15. Escribe una función polinómica de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo.

La derivada, que será una ecuación de segundo grado, debe tener dos soluciones.
Por ejemplo, $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ tiene dos soluciones, $x = 1$ y $x = 5$.

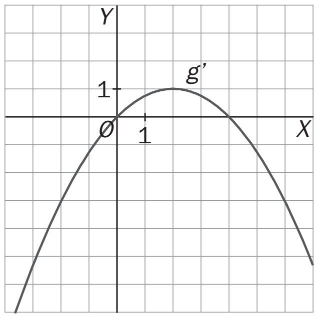
Así pues, la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 10$ tendrá un máximo y un mínimo relativos.

7.16. (PAU) De dos funciones, *f* y *g*, se sabe que la representación gráfica de sus funciones derivadas es una recta que pasa por los puntos (0, 2) y (2, 0) (para la derivada de *f*) y una parábola que corta al eje *X* en (0, 0) y (4, 0), y tiene por vértice (2, 1) (para la derivada de *g*). Utilizando las gráficas de tales derivadas:
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *f* y *g*.
b) Determina, si existen, máximos y mínimos de *f* y *g*.

a) La derivada de *f* es la recta de la gráfica.
Se observa que $f'(x) > 0$ si $x < 2$ y $f'(x) < 0$ si $x > 2$. Así pues, la función *f* es creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente en $(2, +\infty)$.



La derivada de *g* es la parábola cóncava hacia abajo de la gráfica.
Se observa que $g'(x) < 0$ si $x < 0$ o si $x > 4$ y $g'(x) > 0$ si $0 < x < 4$.
Así pues, la función *g* es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y creciente en (0, 4).



b) La función *f* tiene un máximo relativo en el punto $A(2, f(2))$ y no tiene mínimos.
La función *g* tiene un mínimo relativo en el punto $B(0, g(0))$ y un máximo relativo en el punto $C(4, g(4))$.

7.17. (PAU) Halla los extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$.

La función es continua en todo **R**. Su derivada es $f'(x) = \dfrac{(x+1)(1-x)}{e^x}$, y se anula si $x = 1$ o si $x = -1$. Su signo:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de *f*	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función tiene un mínimo relativo, que también es absoluto, en el punto $A(-1, f(-1)) = A(-1, 0)$, y un máximo relativo en el punto $B(1, f(1)) = B\left(1, \dfrac{4}{e}\right)$.

7.18. Escribe una función polinómica de tercer grado, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $b \neq 0$, que no tenga ni máximos ni mínimos relativos.

Se busca una función cuya derivada no se anule nunca. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, y para que no se anule nunca, el discriminante de la ecuación $3ax^2 + 2bx + c = 0$ debe ser negativo. Es decir:

$(2b)^2 - 4 \cdot 3ac < 0 \Rightarrow 4b^2 - 12ac < 0$. Si *b* toma un valor muy pequeño y *a* y *c* grandes, se cumplirá la condición.

Por ejemplo: $b = 1$, $a = c = 10$ cumplen lo dicho.

La función $f(x) = 10x^3 + x^2 + 10x + 1$ no tiene extremos relativos.

Aplicaciones de las derivadas a problemas de optimización

7.19. (PAU) Averigua razonadamente dónde alcanza el máximo absoluto la función:

a) $f(x) = 2x + 4$ **si** $0 \le x \le 4$ **b)** $f(x) = x^2 - 4$ **si** $4 < x \le 8$

a) La derivada de f es $f'(x) = 2$, que no se anula nunca. Como $f(0) = 4$ y $f(4) = 12$, el máximo absoluto se alcanza en el punto $A(4, 12)$.

b) La derivada de f es $f'(x) = 2x$, que se anula si $x = 0$. Como f no está definida en 4, $\lim_{x \to 4} f(x) = 12$ y $f(8) = 60$, el máximo absoluto se alcanza en el punto $B(8, 60)$.

7.20. (PAU) Halla las dimensiones de una ventana rectangular de 6 metros de perímetro para que tenga la máxima superficie posible y, así, produzca la máxima luminosidad.

1. Las variables son las longitudes de los lados de la ventana: x e y.
2. La relación entre ellas: $2x + 2y = 6$. Despejando, $y = 3 - x$.
3. La función a maximizar es la superficie de la ventana: $A = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x(3 - x) = 3x - x^2$.
4. Se busca el intervalo de definición de la variable. Como x e y deben ser positivos, $x > 0$ e $y > 0$, y, por tanto, $3 - x > 0$, es decir, $x < 3$. Entonces, $0 < x < 3$, lo que significa que la variable x debe estar en el intervalo $(0, 3)$.
5. Se halla el máximo de $A(x) = x(3 - x) = 3x - x^2$ en $(0, 3)$. Su derivada, $A'(x) = 3 - 2x$, se anula si $x = \frac{3}{2}$, que es un máximo, ya que la función es una parábola cóncava hacia abajo.

El otro lado mide $y = 3 - x = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ m.

Entonces, la máxima luminosidad se consigue si la ventana es un cuadrado de lado 1,5 metros.

7.21. (PAU) Halla dos números cuya suma sea 20 sabiendo que su producto es máximo.

Los números serán x y $20 - x$; por tanto, la función a maximizar es $f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$.
Se trata de una parábola cóncava hacia abajo cuyo máximo es su vértice. La derivada es $f'(x) = 20 - 2x$, que se anula si $x = 10$.
Por tanto, los números son 10 y 10, y el producto máximo es 100.

7.22. (PAU) Encuentra un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima.

Si x es el número buscado, el problema se reduce a encontrar el máximo de la función $f(x) = x - x^2$. Su gráfica es una parábola cóncava hacia abajo y el máximo es su vértice.

La derivada es $f'(x) = 1 - 2x$ y se anula si $x = \frac{1}{2}$. Así pues, $\frac{1}{2}$ es el número buscado.

7.23. (PAU) Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 8 m^2. El metro lineal de tramos horizontal cuesta 2,50 euros, mientras que el metro lineal de tramos vertical cuesta 5 euros. Determina las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo y el precio de dicho marco.

1. Sea x la longitud en metros del tramo horizontal e y la longitud en metros del tramo vertical.
2. La función coste que hay que minimizar es $S = 2 \cdot 2{,}5x + 2 \cdot 5y = 5x + 10y$.
3. Como la superficie de la ventana es de 8 m^2, x e y deben cumplir que $x \cdot y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$.

Así se obtiene la función coste en función de una sola variable. $S(x) = 5x + 10 \cdot \frac{8}{x} = 5x + \frac{80}{x}$.

4. La única restricción para x es que sea positiva.
5. Se calcula el mínimo de $S(x) = 5x + \frac{80}{x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$. La derivada de S $S'(x) = 5 - \frac{80}{x^2}$, que se anula si $x = 4$. La solución negativa se descarta. Como a la derecha de 4 la derivada es positiva, y a la izquierda, negativa, el punto $(4, S(4)) = (4, 40)$ es, en efecto, un mínimo.

Las dimensiones de la ventana de coste mínimo son 4 metros el tramo horizontal y 2 metros el tramo vertical.
El coste mínimo es de 40 euros.

7.24. (PAU) Nos dicen que la función $f(t) = t - 2$ es derivada de la inflación en función del tiempo en cierto país, cuando $0 \le t \le 5$.

a) Determina el valor de t para el que la inflación alcanza el valor mínimo. ¿Cuál es el valor del mínimo?

b) Determina cuándo la inflación es máxima y cuál es su valor.

a) La derivada, $f(t) = t - 2$, se anula si $t = 2$. A la izquierda de 2 es negativa (la inflación decrece), y a la derecha de 2 es positiva (la inflación crece). En $t = 2$ se tiene la inflación mínima.

Dado que la función inflación tiene una expresión del tipo $F(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + C$, que es una parábola cóncava hacia abajo, se sabe que alcanza su mínimo absoluto en su vértice, que se encuentra en $t = 2$.

El valor que tiene en ese punto es $F(2) = \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 + C = -2 + C$.

b) Para hallar la inflación máxima hay que comparar el valor de F en los extremos:

$F(0) = C$ y $F(5) = \frac{5^2}{2} - 2 \cdot 5 + C = \frac{5}{2} + C$

Está claro que $F(0) < F(5)$; así pues, la inflación máxima se alcanza para $t = 5$ y vale $C + \frac{5}{2}$

7.25. Encuentra 3 números no negativos que sumen 14, tales que uno sea doble que otro y que la suma de sus cuadrados sea:

a) Máxima **b) Mínima**

1. Las variables son los tres números: x, $2x$, y.
2. La relación entre ellas: $x + 2x + y = 14 \Rightarrow y = 14 - 3x$.
3. La función que hay que maximizar y minimizar es $S = x^2 + (2x)^2 + y^2 = 14x^2 - 84x + 196$.
4. Como $x > 0$ e $y = 14 - 3x > 0$, x debe estar en el intervalo $\left[0, \frac{14}{3}\right]$.
5. Se calcula el máximo y el mínimo de $S(x)$ en $\left[0, \frac{14}{3}\right]$. La derivada $S'(x) = 28x - 84 = 0 \Rightarrow x = 3$. Se compara el valor de S en ese punto y en los extremos del intervalo: $S(3) = 70$, $S(0) = 196$ y $S\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{980}{9}$. El máximo se alcanza en $x = 0$ y los números serían 0, 0 y 14, y el mínimo en $x = 3$ y los números serían 3, 6 y 5.

7.26. Partimos un hilo metálico de longitud 1 m en dos trozos, haciendo con uno un cuadrado y con el otro un círculo. Calcula las dimensiones de cada trozo para que la suma de las áreas sea:

a) Máxima **b) Mínima**

1. Las variables son las longitudes de los dos trozos: x (para hacer el círculo), y (para hacer el cuadrado).
2. La relación entre ellas: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$.
3. La función optimizar es la suma de las áreas. El lado del cuadrado es $\frac{1-x}{4}$, y su área, $\left(\frac{1-x}{4}\right)^2$.

De la longitud de la circunferencia se obtiene el radio $x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$. Su área es $\pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

La función suma es $A(x) = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 2\pi x + \pi}{4^2\pi}$.

4. El valor que debe tomar x es cualquiera del intervalo (0, 1).
5. Se halla el máximo y el mínimo de $A(x)$ en (0, 1). Su derivada, $A'(x) = \frac{(\pi+4)x - \pi}{8\pi} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{\pi+4}$.

Este valor corresponde al mínimo, ya que la función es una parábola cóncava hacia arriba.

Se hallan los límites en los extremos del intervalo: $\lim_{x\to 0} A(x) = \frac{1}{4^2}$ y $\lim_{x\to 1} A(x) = \frac{1}{4\pi}$. Si solo se formara un círculo con todo el hilo, se obtendría el área máxima. Pero esta posibilidad no la contempla el problema.

Así pues, cuanto más largo sea el trozo para formar el círculo, mayor será la suma de las áreas.

7.27. Queremos escribir un texto de 96 cm^2 y tal que haya 2 cm de margen en cada lateral de la hoja en la que está escrito, así como 3 cm arriba y abajo. Calcula las dimensiones de la hoja más pequeña posible.

1. Sean x e y las dimensiones de la página, la función que hay que minimizar es el producto xy.
2. Relación entre las variables: $(x - 4)(y - 6) = 96 \Rightarrow xy - 6x - 4y = 72 \Rightarrow y = \dfrac{72+6x}{x-4}$
3. Función a minimizar es $f(x) = x \cdot y = \dfrac{72x+6x^2}{x-4}$.
4. Dado que los márgenes laterales son de 2 cm, $x > 4$.
5. Se halla el mínimo de $f(x)$: $f'(x) = \dfrac{(x-4)(72+12x)-(72x+6x^2)}{(x-4)^2} = \dfrac{6x^2-48x-288}{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 48x - 288 = 0$

$\Leftrightarrow\ x^2 - 8x - 48 = 0 \Leftrightarrow\ (x - 12)(x + 4) = 0\ \Leftrightarrow\ x = 12,\ x = -4$. Solo es razonable el valor positivo.

A la izquierda de 12, $f'(x) < 0$, y a la derecha, $f'(x) > 0$, por lo que en $x = 12$ se presenta un mínimo que corresponde a unas dimensiones de la página $x = 12$ cm, $y = \dfrac{72+72}{8} = 18$ cm.

7.28. (PAU) Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la siguiente función:
$B(x) = 2x - x^2 - 0{,}84$, siendo $B(x)$ el beneficio por kilogramo, expresado en euros, cuando x es el precio de cada kilogramo también en euros.
a) ¿Entre qué precios por kilogramo se producen beneficios para el almacenista?
b) ¿Qué precio por kilogramo maximiza los beneficios para éste?
c) Si tiene en el almacén 10 000 kilogramos de fresas ¿cuál será el beneficio total máximo que podría obtener?

a) Para que eso ocurra, $2x - x^2 - 0{,}84 > 0$. Como $2x - x^2 - 0{,}84 = -\left(\dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{25}\right)\left(\dfrac{1}{5}x - \dfrac{7}{25}\right) > 0$, obtendrá

0 beneficios si $x \in \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{7}{5}\right) = (0{,}6;\ 1{,}4)$, es decir, a un precio mayor de 0,60 €/kg y menor de 1,40 €/kg.

b) $B'(x) = 2 - 2x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1) = 0{,}16$
Obtiene el máximo beneficio vendiendo las fresas a 1 €/kg y es de 0,16 € por kilo.

c) Lo obtendría vendiendo todas las fresas: $0{,}16 \cdot 10000 = 1600$ €.

7.29. De entre todos los números reales positivos x, y tales que x + y = 10, encuentra aquellos para los que el producto $p = x^2y$ es máximo.

Se halla y en función de x, $y = 10 - x$, y se sustituye en p: $p(x) = x^2(10 - x)$ con $0 < x < 10$, $p'(x) = 20x - 3x^2$, se anula si $x = 0$ o si $x = \dfrac{20}{3}$. Como $p(0) = 0 = p(10)$ y $p\left(\dfrac{20}{3}\right) = \dfrac{4000}{27}$, el máximo se obtiene si $x = \dfrac{20}{3}$ e $y = \dfrac{10}{3}$.

7.30. (PAU) Una fábrica de televisores vende cada aparato a 300 €. Los gastos derivados de fabricar x televisores son $D(x) = 200x + x^2$, donde $0 \le x \le 80$.
a) Suponiendo que se venden todos los televisores que se fabrican, halla la función de los beneficios que se obtienen después de fabricar y vender x televisores.
b) Determina el número de aparatos que conviene fabricar para obtener el beneficio máximo, así como dicho beneficio máximo.

a) Beneficio = ingresos – gastos. Luego $B(x) = 300x - (200x + x^2)$ con $0 \le x \le 80$.

b) $B'(x) = 100 - 2x = 0$ si $x = 50$. Como $B(0) = 0$, $B(50) = 2500$ y $B(80) = 1600$, los beneficios máximos se obtienen fabricando 50 televisores y son de 2500 €.

7.31. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Llamando x a los lados iguales e y al desigual tenemos la relación $2x + y = 8$, $2 < x < 4$.

Hay que maximizar la función $A = \dfrac{y\sqrt{4x^2-y^2}}{4} = \dfrac{(8-2x)\sqrt{4x^2-(8-2x)^2}}{4} = 2(4-x)\sqrt{2x-4}$,

$A'(x) = \dfrac{2(8-3x)}{\sqrt{2x-4}} = 0\ \Leftrightarrow\ 8-3x = 0\ \Leftrightarrow\ x = \dfrac{8}{3} \Rightarrow A(2) = 0,\ A(4) = 0$ y $A\left(\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ El área máxima se alcanza cuando el triángulo es equilátero de lados $\dfrac{8}{3}$.

7.32. (PAU) Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de 192 m^2 de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima.

1. Variables: x, la longitud de la piscina, e y, su profundidad.

2. La relación entre ellas viene dada por el área a cubrir con baldosas: $x^2 + 4xy = 192 \Rightarrow y = \dfrac{192 - x^2}{4x}$.

3. Función a maximizar: $V = x^2 \cdot y = \dfrac{x(192 - x^2)}{4}$.

4. Se calcula su máximo: $V'(x) = \dfrac{192 - 3x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow$ si $x = 8$, que es un máximo de la función, ya que si $x < 8$, $V'(x) > 0$, y si $x > 8$, $V'(x) < 0$.

Así pues, el máximo se alcanza cuando la piscina tiene 8 m de largo y 4 m de profundidad.

Curvatura y puntos de inflexión

7.33. (PAU) Estudia la curvatura y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1}$ **g)** $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$ **i)** $f(x) = x^3 \cdot (x+2)$

b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ **d)** $f(x) = e^{1-x^2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **h)** $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ **j)** $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x}$

a) $f''(x) = -\dfrac{4}{(x+1)^3}$ es positiva si $x < -1$, y negativa si $x > -1$. Por tanto, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, +\infty)$. En $x = -1$ tiene una asíntota vertical.

b) $f''(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 4(x+1) + 2}{e^x} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ o $x = 1 + \sqrt{2}$. La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

Son puntos de inflexión $A(1-\sqrt{2}, f(1-\sqrt{2})) = \left(1-\sqrt{2}, \dfrac{6-4\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}}\right)$ y $B(1+\sqrt{2}, f(1+\sqrt{2})) = \left(1+\sqrt{2}, \dfrac{6+4\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}}\right)$.

c) $f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^4}$ es siempre positiva. Es cóncava hacia arriba en **R** – {2}. En $x = 2$ hay una asíntota vertical.

d) $f''(x) = e^{1-x^2}(4x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Son puntos de inflexión $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$ y $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$.

e) $f''(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3}$. Como $D(f)$ = **R** – {–1, 1}, se estudia el signo de la derivada segunda en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$. La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, +\infty) - \{1\}$.
En $x = -1$ tiene una asíntota vertical, y en $x = 1$, una discontinuidad evitable.

f) $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$. La función es cóncava hacia abajo en $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $A\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right) = \left(e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

g) $f''(x) = \dfrac{1}{x^3}$. La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.
En $x = 0$ hay una asíntota vertical.

h) $f''(x)=\dfrac{2-x}{x^3}=0 \Leftrightarrow x=2$. La función es cóncava hacia arriba en (0, 2) y cóncava hacia abajo en (2, +∞).

Tiene un punto de inflexión en $A(2, f(2))=\left(2, \dfrac{1}{2}+\ln 2\right)$.

i) $f''(x)=12x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ o $x=-1$. La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)\cup(0, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en (–1, 0).
Tiene puntos de inflexión en $A(-1, -1)$ y en $B(0, 0)$.

j) $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}=\begin{cases}\dfrac{-x}{2-x} & x<0\\ \dfrac{x}{2-x} & x\geq 0;\ x\neq 2\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{(x-2)^3} & x<0\\ \dfrac{-4}{(x-2)^3} & x>0;\ x\neq 2\end{cases}$

La función es cóncava hacia arriba en (0, 2) y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$.
En $x = 0$, la función no es derivable y, aunque allí cambia la curvatura, no es un punto de inflexión.
En $x = 2$ hay una asíntota vertical.

7.34. (PAU) Calcula los puntos de inflexión de la función f(x) = $x^3 + 6x - 3$.

$f'(x) = 3x^2 + 6 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Como $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y $f''(x) > 0$ si $x > 0$, la función tiene un punto de inflexión en $A(0, -3)$.

7.35. Estudia la curvatura y determina la abscisa de los puntos de inflexión de f(x) sabiendo que

$$f''(x) = (x + 1)(x - 3)^2(x - 7).$$

La derivada segunda se anula en $x = -1$, $x = 3$ y $x = 7$.
Como $f''(x) < 0$ en $(-1, 3)\cup(3, 7)$ y $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -1)\cup(7, +\infty)$, la función tiene dos puntos de inflexión: uno en el punto de abscisa –1 y otro en el punto de abscisa 7.
En $x = 3$ no hay un punto de inflexión, pues no hay cambio de curvatura.

7.36. a) Halla los puntos de inflexión de $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

b) Halla la recta tangente a la curva en su punto de inflexión de abscisa positiva.

a) $y'=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y''=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=-\sqrt{3}$ o $x=\sqrt{3}$

Como la derivada segunda es positiva en $(-\sqrt{3}, 0)\cup(\sqrt{3}, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -\sqrt{3})\cup(0, \sqrt{3})$, la función tiene tres puntos de inflexión: $A\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0, 0)$ y $C\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

b) Para hallar la recta tangente en $C\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ hay que calcular $f'\left(\sqrt{3}\right)=-\dfrac{1}{8}$.

La ecuación de la recta tangente es $y-f\left(\sqrt{3}\right)=f'\left(\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) \Rightarrow y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{1}{8}\left(x-\sqrt{3}\right)$

Por tanto, $y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

7.37. Calcula las abscisas de los puntos de inflexión de f(x) si $f''(x)=(x-2)(x-4)^2(x+5)$.

La derivada segunda se anula en $x = -5$, $x = 2$ y $x = 4$.

Como $f''(x) < 0$ en $(-5, 2)$ y $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -5)\cup(2, 4)\cup(4, +\infty)$, la función tiene dos puntos de inflexión: uno de abscisa –5 y el otro de abscisa 2. En $x = 4$ no hay un punto de inflexión, pues no hay cambio de curvatura.

7.38. (PAU) Demuestra que la curva de ecuación $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene ningún punto de inflexión.

$y'=4x^3-3x^2+2x-1;\quad y''=12x^2-6x+2$
La derivada segunda no se anula, luego la curva no tiene ningún punto de inflexión.

7.39. Utiliza el criterio de la segunda derivada para hallar los máximos y mínimos relativos de estas funciones:

a) $f(x) = x^3(x - 2)$ **b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$**

a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0$ si $x = 0$ o $x = \frac{3}{2}$

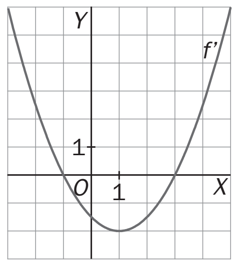
Se halla $f''(x) = 12x^2 - 12x$ y se estudia su signo en $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$.

$f''(0) = 0$. Por tanto, no se puede afirmar si es o no un extremo relativo.
Hay que estudiar el signo de la primera derivada a izquierda y derecha de $x = 0$: $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ son negativos. Entonces, en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 9 > 0 \Rightarrow A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0$ si $x = 2$ o $x = 3$. Se halla $f''(x) = 12x - 30$ y se estudia su signo en $x = 2$ y $x = 3$.
$f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo en $A(2, f(2)) = A(2, 28)$.
$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo en $B(3, f(3)) = B(3, 27)$.

7.40. La gráfica que se muestra en la figura representa la derivada de una cierta función $f(x)$.
A partir de ella, deduce los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, así como sus extremos relativos, su curvatura y sus puntos de inflexión.



La función derivada es positiva en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Por tanto, es creciente en esos intervalos.

Y es negativa en $(-1, 3)$, donde la función es decreciente.
Como la derivada se anula en $x = -1$ y en $x = 3$, y en esos puntos cambia de signo, la función tiene un máximo para $x = -1$ y un mínimo para $x = 3$.
Además, la función derivada tiene un mínimo en $x = 1$, luego en ese valor se anula la derivada segunda. Como la función derivada decrece en $(-\infty, -1)$, la derivada segunda es negativa en ese intervalo y, por tanto, la función es cóncava hacia abajo en él. En $(1, +\infty)$, la función derivada es creciente, luego la derivada segunda es positiva en ese intervalo y, por tanto, la función es cóncava hacia arriba en él.

Dado que en $x = 1$ se anula la segunda derivada de la función y cambia su curvatura, tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$.

7.41. ¿Es posible encontrar una función polinómica de tercer grado que no tenga ningún punto de inflexión?

Para que eso sea posible, la derivada segunda de la función debe ser constante, ya que de lo contrario se anularía en algún punto que sería el de inflexión.

Como al derivar dos veces una función polinómica de grado tres se obtiene un polinomio de grado uno, que se anula para algún valor de x, se puede afirmar que cualquier función de este tipo tiene siempre un punto de inflexión.

7.42. Halla los valores de m para los que la función $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$ es siempre cóncava hacia arriba.

Para que eso suceda, $f''(x)$ debe ser siempre no negativa.
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx + 3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m$
Como f'' es una parábola cóncava hacia arriba, será no negativa si no tiene raíces reales o si tiene una única raíz doble. Esto sucede si el discriminante de la ecuación es menor o igual que 0: $144 - 24m \leq 0 \Rightarrow m \geq 6$.

Algunos teoremas sobre funciones derivables

7.43. ¿Cuántas veces corta al eje horizontal la gráfica de $f(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 2$?

La función corta al eje horizontal al menos dos veces, pues $f(-10) > 0$, $f(0) < 0$, $f(10) > 0$ y f es continua.

Por otra parte, $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 10x$ solo se anula una vez, en $x = 0$, por lo que f se anula dos veces, ya que, según el teorema de Rolle, entre cada dos ceros de la función existe un punto donde se anula la derivada.

7.44. Sea $f(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2 + 3$.
Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo [–1, 2].

La función es continua en [–1, 2] y derivable en (–1, 2). Además, $f(-1) = f(2) = 3$.

Por el teorema de Rolle, existe c en (–1, 2) con $f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = 0$.

7.45. Aplicando el teorema de Rolle, justifica que la gráfica de la función $f(x) = 3x^5 + 7x + 1$ no puede cortar 2 veces al eje horizontal.

Si la función cortara dos veces al eje horizontal, en a y b, tendría que ocurrir que $f(a) = f(b) = 0$ y, por el teorema de Rolle, la derivada de f se anularía entre a y b.

Se halla la derivada $f'(x) = 15x^4 + 7$ y se comprueba que no se anula nunca. Luego la función no puede cortar al eje horizontal dos veces.

7.46. Sin calcular la derivada, ¿puedes asegurar que existe algún punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$ cuya tangente sea paralela a la recta que une los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 3)$?
¿Cuál es ese punto?

Se trata de la interpretación geométrica del teorema del valor medio.

Como $f(0) = 0$ y $f(3) = 3$, se puede afirmar que existe un número c entre 0 y 3 con $f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3 - 0}{3} = 1$.

El punto es aquel en el que la derivada vale 1: $f'(x) = 2x - 2 = 1$ si $x = \frac{3}{2}$. Por tanto, el punto es $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

PROBLEMAS

7.47. (PAU) Un equipo de trabajadores debe hacer la cosecha de un campo de manzanos a partir del 1 de octubre y únicamente puede trabajar durante un día. Si se hace la cosecha el 1 de octubre, se recogerán 60 toneladas y el precio será de 2000 €/tonelada. Sabemos que a partir de ese día, la cantidad que se podría recoger aumentará en una tonelada cada día, pero el precio de la tonelada disminuirá en 20 €/día.

a) Determina la fórmula que expresa los ingresos que se obtienen en función del número de días que se dejan pasar a partir del 1 de octubre para hacer la cosecha.

b) Halla cuántos días deben pasar para que los ingresos por la cosecha sean máximos.

c) Indica cuál es el valor máximo de los ingresos por la cosecha.

d) Halla cuántos días deben pasar para que los ingresos por la cosecha sean los mismos que si se hiciese el día 1 de octubre.

a) Llamando x al número de días que se dejan pasar a partir del 1 de octubre, los ingresos, $f(x)$ en euros, vienen dados por la función $f(x) = (60 + x)(2000 - 20x) = -20x^2 + 800x + 120\,000$.

b) Como $f(x)$ es una parábola cóncava hacia abajo, el máximo es su vértice. La derivada es $f'(x) = -40x + 800$, que se anula si $x = 20$. Así pues, si se dejan pasar 20 días, se obtendrán los máximos beneficios.

c) El valor máximo de los ingresos es $f(20) = 128\,000$ euros.

d) Los ingresos obtenidos el 1 de octubre son $f(0) = 60 \cdot 2000 = 120\,000$ euros. Si x es el número de días transcurridos para que los ingresos sean de 120 000 euros, entonces: $-20x^2 + 800x + 120\,000 = 120\,000 \Rightarrow$ $\Rightarrow -20x^2 + 800x = 0 \Rightarrow -20x(x + 40) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ (corresponde al 1 de octubre) y $x = 40$. Así pues, deben pasar 40 días.

7.48. (PAU) La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley: $C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30\,000$,siendo x el número de días.

a) ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2?

b) Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima.

c) Calcula esas cotizaciones máxima y mínima.

a) En el día 2, la cotización ha sido $C(2) = 2^3 - 45 \cdot 2^2 + 243 \cdot 2 + 30\,000 = 30\,314$.

b) Se halla el máximo y el mínimo de $C(x)$ en el intervalo cerrado [0, 30]. La derivada es $C'(x) = 3x^2 - 90x + 243$, que se anula si $x = 3$ o si $x = 27$.
Se compara el valor de la función en esos puntos con los que toma en los extremos del intervalo [0, 30]:
$C(3) = 30\,351$, $C(27) = 23\,439$, $C(0) = 30\,000$ y $C(30) = 23\,790$.
El mínimo se alcanza el día 27, y el máximo, el día 3.

c) La cotización mínima es $C(27) = 23\,439$, y la máxima, $C(3) = 30\,351$.

7.49. (PAU) Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles) viene dado por la siguiente expresión: $f(x) = (x - 2)^2\,(1 - 2x) + 252x + 116$, $0 \le x \le 10$. Donde x indica años.

a) Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en que decreció.

b) El individuo retira sus ingresos transcurridos los 10 años. ¿Cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

a) La función es $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 240x + 120$, y su derivada, $f'(x) = -6x^2 + 18x + 240$, que se anula si $x = 8$ o si $x = -5$. Como x representa años, debe ser positivo y, por tanto, la solución negativa no tiene sentido.
La derivada es positiva en el intervalo (0, 8), luego la cartera crece desde el inicio hasta los 8 años, y negativa en (8, 10), por lo que decrece desde los 8 hasta los 10 años.

b) Hay que comparar el valor de la cartera a los 8 años, al inicio y al final: $f(8) = 1592$, $f(0) = 120$ y $f(10) = 1420$.
El mejor momento para retirar sus ingresos habría sido a los 8 años.
Ha perdido 1 592 000 – 1 420 000 = 172 000 euros.

7.50. (PAU) El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función $P(t) = \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2}$, donde t mide los años transcurridos desde $t = 0$.

Calcula:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanzará la mínima población. ¿Cuál será el tamaño de ésta?

c) ¿Cuál será el tamaño de la población a largo plazo?

a) La población inicial es el valor de la función para $t = 0$: $P(0) = 15$, es decir, 15 millones de individuos.

b) Para calcular el mínimo se halla la derivada:

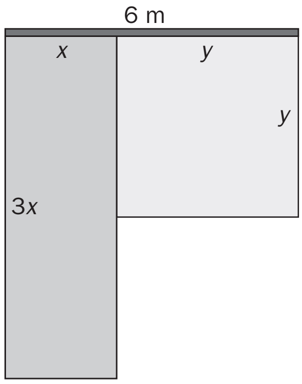
$$P'(t) = \frac{2t \cdot (t+1)^2 - \left(15 + t^2\right) \cdot 2 \cdot (t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2 \cdot (t+1) \cdot (t-15)}{(t+1)^4} = \frac{2(t-15)}{(t+1)^3}$$

$P'(t) = 0$ cuando $t = 15$.

A la izquierda de 15, $f'(x) < 0$, y a la derecha, $f'(x) > 0$. Por tanto, la mínima población se alcanza a los 15 años y su tamaño es $P(15) = 0{,}9375$, es decir, 937 500 individuos.

c) Hay que calcular el límite cuando el tiempo tiende a infinito:
$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2} = 1$, es decir, tiende a estabilizarse en un millón de habitantes.

7.51. Un artista ha adquirido un listón de 6 metros de largo del que quiere colgar dos grandes telas rectangulares, una a continuación de la otra y que ocupen todo el listón: la primera ha de ser naranja y el lado que está sobre el listón debe ser un tercio del lado que cuelga; y la otra será verde y debe tener forma de cuadrado. ¿Qué dimensiones deben tener las telas para que su superficie sea la mínima posible?



La función a minimizar es $S = 3x^2 + y^2$, cuyas variables deben ser ambas positivas y estar sujetas a la relación $x + y = 6$.

Al sustituir y en S se obtiene: $S = 3x^2 + (6 - x)^2$ con $x \in [0, 6]$

$S'(x) = 6x + 2(6 - x) \cdot (-1) = 8x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [0, 6]$.

Comparando los valores de $S(0) = 36$, $S(6) = 108$ y $S\left(\frac{3}{2}\right) = 27$, se obtiene que para que la superficie sea mínima, la tela naranja debe medir 1,5 · 4,5 m y la verde debe ser un cuadrado de 4,5 m de lado.

7.52. (PAU) Una compañía de transportes ha comprobado que el número de viajeros diarios depende del precio del billete, según la función $n(p) = 3000 - 6p$, donde $n(p)$ es el número de viajeros cuando p es el precio del billete.

Obtén:

a) La función que expresa los ingresos diarios (I) de esta empresa en función del precio del billete (p).

b) El precio del billete que hace máximos dichos ingresos.

c) ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos?

a) $I(p) = p(3000 - 6p) = 3000p - 6p^2$

b) El máximo de la función $I(p)$, dado que es una parábola cóncava hacia abajo, está en su vértice.

La derivada es $I'(p) = 3000 - 12p$, que se anula si $p = 250$. Así pues, el precio del billete que maximiza los ingresos es 250.

c) Los ingresos máximos son $I(250) = 375\,000$.

7.53. (PAU) Una fábrica de automóviles ha realizado un estudio sobre sus beneficios/pérdidas en miles de euros a lo largo de los últimos 10 años y ha comprobado que se ajustan a la función

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3, \quad 0 \le t \le 10.$$

Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿En qué años se producen los valores máximos y mínimos de dicha función?

b) Determinar sus periodos de crecimiento y decrecimiento.

c) ¿Cuáles son sus beneficios máximos?

d) ¿Qué resultados obtuvo la empresa en el último año del estudio?

a) Hay que calcular el máximo y el mínimo de la función en [0, 10].

La derivada de la función es $F'(t) = 3t^2 - 36t + 81$, que se anula si $t = 3$ o si $t = 9$.

Se comparan: $F(3) = 105$, $F(9) = -3$, $F(0) = -3$ y $F(10) = 7$.

El máximo se alcanza en el año 3, y el mínimo, en los años 0 y 9.

b) Estudiando el signo de la derivada se observa que F es creciente en $(0, 3)\cup(9, 10)$ y decreciente en $(3, 9)$.

c) Sus beneficios máximos son de $F(3) = 105$, es decir, 105 000 euros.

d) En el último año, $t = 10$, obtuvo unos beneficios de $F(10) = 7$, esto es, 7000 euros.

7.54. (PAU) Se sabe que los costes totales de fabricar x unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión $C(x) = 3x^2 - 27x + 108$.

a) ¿Cuántas unidades hay que producir para minimizar el coste medio $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$?

b) Justifica que la función que define el coste medio, $M(x)$, no tiene puntos de inflexión.

a) El coste medio viene dado por la función $M(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 3x - 27 + \dfrac{108}{x}$. Su derivada es $M'(x) = 3 - \dfrac{108}{x^2}$, que se anula si $3 - \dfrac{108}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 = 108 \Rightarrow x = 6$. Dado que x representa el número de unidades de un producto, solo se considera la solución positiva.
Como a la izquierda de 6 la derivada es negativa, M decrece, y como a su derecha es positiva, M crece. Por tanto, para $x = 6$ se obtiene el mínimo. Así pues, se obtiene el mínimo coste medio produciendo 6 unidades.

b) La derivada segunda de $M(x)$ es $M''(x) = \dfrac{216}{x^3}$, que no se anula nunca, y, por tanto, la función $M(x)$ no puede tener puntos de inflexión.

7.55. A) Se considera la función f definida en el intervalo $I = [0, 5]$ por $f(x) = 9x - 15 - e^{2-0,2x}$.

a) Estudia el signo de $f'(x)$ en I.

b) Demuestra que la ecuación $f(x) = 0$ admite una única solución en I y, con la ayuda de la calculadora, obtenla con una aproximación de 0,01.

B) En una empresa, se le encarga a un economista que modelice el coste de producción, en miles de euros, de x cientos de objetos fabricados y obtiene una función C definida por $C(x) = 9x + 15 + e^{2-0,2x}$. Cada objeto es vendido a 200 €, pero solamente se vende el 90% de los objetos fabricados.

a) Sabiendo que la empresa no puede fabricar más de 500 objetos, ¿en qué intervalo J se mueve x?

b) Comprueba que la recaudación R, en millares de euros, para una producción de x cientos de objetos, viene dada por $R(x) = 18x$.

c) Prueba que el beneficio, en miles de euros, obtenido por la producción de x cientos de objetos, viene dado por la función $B(x)$ definida en J por $B(x) = 9x - 15 - e^{2-0,2x}$.

d) Deduce del apartado A el mínimo número de objetos que hay que fabricar para obtener algún beneficio.

A)

a) La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 9 + 0,2e^{2-0,2x}$. En el intervalo [0, 5], la derivada es siempre positiva y, por tanto, la función es siempre creciente en dicho intervalo.

b) Como f es continua, $f(0) = -22,389 < 0$ y $f(5) = 30 - e > 0$, por el teorema de Bolzano, la función corta al eje X en el intervalo [0, 5].
Por otro lado, al ser una función es creciente, solo lo corta una vez. Así pues, $f(x) = 0$ solo tiene una solución en [0, 5].
Con la calculadora, se obtiene que esa solución está comprendida entre 2,19 y 2,20: $f(2,19) = -0,058$ y $f(2,20) = 0,041$.

B)

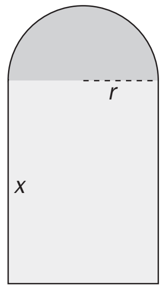
a) El intervalo en el que se mueve x es $J = [0, 5]$.

b) La recaudación en cientos de euros, al producir x cientos de objetos, viene dada por la función
$R(x) = 200 \cdot \dfrac{90}{100} x = 180x$. En miles de euros es $R(x) = 18x$.

c) El beneficio se obtiene al restar a la recaudación los costes:
$B(x) = R(x) - C(x) = 18x - (9x + 15 + e^{2-0,2x}) = 9x - 15 - e^{2-0,2x}$.

d) En el apartado A se vio que $B(2,20) = 0,041 \Rightarrow 2,20 \cdot 100 = 220$ objetos. A partir de esta cantidad se obtiene algún beneficio.

7.56. (PAU) Una ventana tiene la forma de semicírculo montado sobre un rectángulo. El rectángulo es de cristal transparente, mientras que el semicírculo es de un cristal de color que transmite la mitad de luz por unidad de área transparente. El perímetro total (exterior) de la ventana es fijo.
Halla las proporciones de la ventana que aporten la mayor cantidad de luz.



Llamando r al radio del círculo y x a la altura del rectángulo, se obtiene la mayor cantidad de luz cuando la superficie de la ventana es máxima. Luego hay que maximizar la función $S = 2rx + \frac{1}{2}\pi r^2$ con r y x positivas.

El perímetro P da la relación entre las variables: $P = 2r + 2x + \pi r \Rightarrow x = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2}r$

Se sustituye x en S: $S = 2r\left(\frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2}r\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 = Pr - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$

Como x y r son positivos: $x = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2}r > 0 \Rightarrow r < \frac{P}{2+\pi}$. Luego $r \in \left(0, \frac{P}{2+\pi}\right)$.

Dado que S es una parábola, su máximo coincide con su vértice: $S'(r) = P - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow$

$r = \frac{P}{4+\pi} \in \left(0, \frac{P}{2+\pi}\right)$. Como $x = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2} \cdot r = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2} \cdot \frac{P}{4+\pi} = \frac{P}{4+\pi} = r$.

Por tanto, se obtiene la máxima cantidad de luz si la ventana es un rectángulo de base $2r$ y altura r.

PROFUNDIZACIÓN

7.57. a) Calcula los números reales a y b para que la función g: $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow$ R dada por $g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x + b)$, pase por el origen de coordenadas y admita tangente paralela al eje de abscisas en el punto de abscisa $\frac{1}{2}$.

b) Considera la función f: $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow$ R dada por $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x + 1)$.

Prueba que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Determina los intervalos donde f es negativa y aquellos en los que es positiva.

a) Para que pase por el origen: $g(0) = 0 \Rightarrow -0^2 + a \cdot 0 - \ln(2 \cdot 0 + b) = -\ln(b) = 0 \Rightarrow b = 1$

Para que la tangente en el punto de abscisa $\frac{1}{2}$ sea paralela al eje X: $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) = -2x + a - \frac{2}{2x+1} \Rightarrow g'\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + a - \frac{2}{1+1} = a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2.$

La función $g(x)$ es: $g(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x + 1)$.

b) Si la función se anulara más de una vez en ese intervalo, por el teorema de Rolle, la derivada también se anularía al menos una vez en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. $f'(x) = -2x + 2 - \frac{2}{2x+1} = \frac{2x - 4x^2}{2x+1} = 0$ si $x = 0$ o $x = \frac{1}{2}$.

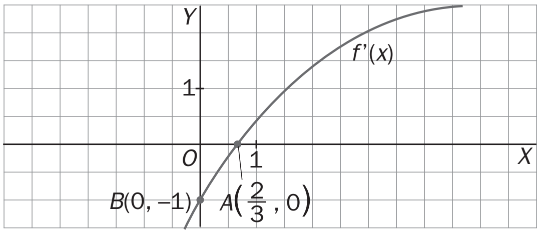
Como la derivada no se anula en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, la función no puede anularse dos veces en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

La derivada es positiva en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; por tanto, f es creciente. Además, $f(0) = 0$. Entonces, la función es positiva en ese intervalo.

En $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, la derivada es negativa; así pues, la función es decreciente y, como $f(0) = 0$, es positiva en todo el intervalo. En $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, la derivada es negativa y, por tanto, la función es decreciente. Como se ha comprobado que la función se anula una vez en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, si $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ con $f(c) = 0$, se concluye que f es positiva en $\left(\frac{1}{2}, c\right)$ y negativa en $(c, +\infty)$.

7.58. Considera una función $y = f(x)$, definida en el intervalo [–1, 4], derivable en dicho intervalo y tal que la gráfica de la derivada, $f'(x)$, es la de la figura, que, como se observa, pasa por los puntos

$$A\left(\frac{2}{3},0\right), \quad B(0,-1).$$



Llamemos C a la gráfica de la función $y = f(x)$. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas, o no puedes responder con la información dada.

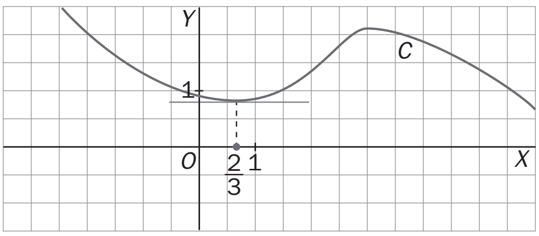
a) La recta de ecuación $y = 1$ es tangente a C en el punto de abscisa $\frac{2}{3}$.

b) La función f es creciente en el intervalo [–1, 4].

c) La ecuación $f(x) = 0$ no tiene solución en el intervalo [–1, 4].

d) La tangente a C en el punto de abscisa 0 es paralela a la recta $y = x$.

e) Una posible curva C es la de la figura.



a) La ecuación de la tangente en el punto $A\left(\frac{2}{3} f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ es $y - f\left(\frac{2}{3}\right) = f'\left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

Como $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, la ecuación de la tangentes es $y = f\left(\frac{2}{3}\right)$. Si $f\left(\frac{2}{3}\right) = 1$, la afirmación es verdadera, y en otro caso, falsa. Por tanto, no es posible, con la información que se tiene, decir si es verdadera o falsa.

b) Falsa, pues al ser la derivada negativa en $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$, la función es decreciente.

c) Lo que se puede saber es que f se anula a lo sumo dos veces en ese intervalo, ya que entre dos puntos de C con ordenada 0 hay un extremo relativo y la derivada solo se anula una vez.

d) Falsa, pues la pendiente de la recta tangente en el punto $A(0, f(0))$ es $f'(0) = -1$, y no es la pendiente de $y = x$.

e) Falsa, pues esa función tiene un máximo en $x = 3$ y allí la derivada no se anula.

7.59. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^3+2x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2-3x+2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de *f* y calcula su derivada cuando sea posible.

b) Halla el máximo y el mínimo absolutos de *f* en el intervalo [–2, 2].

c) Prueba que la ecuación $f(x)=0$ tiene exactamente una sola raíz en el intervalo (–1, 1) y, con la ayuda de la calculadora, obtenla aproximadamente, indicando su primera cifra decimal.

a) La función es continua en **R** – {0} por estar definida por polinomios. En $x = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^3+2x+2\right)=2$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-3x+2\right)=2=f(0) \Rightarrow$ *f* es continua en **R**.

Su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2 & \text{si } x<0 \\ 2x-3 & \text{si } x>0\end{cases}$ y $\lim_{x\to 0^-} f'(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f'(x) \Rightarrow$ *f* es derivable en **R** – {0}.

b) Hay que hallar el valor de la función en los puntos donde se anula *f '* y en los extremos del intervalo:

Si $x\in$ (–2, 0), $f'(x) = 3x^2 + 2$, que no se anula nunca.

Si $x\in$ (0, 2) $f'(x) = 2x – 3$, que se anula en $x = \frac{3}{2}$, que pertenece al intervalo. Por tanto, los posibles extremos son: –2, 0, $\frac{3}{2}$ y 2: $f(–2) = –10$; $f(0) = 2$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ y $f(2) = 0$. El punto *A*(–2, –10) es el mínimo absoluto, y *B*(0, 2), el máximo absoluto.

c) En (–1, 0), la función es creciente, pues $f'(x) > 0$, así que la función se anula como mucho una vez.

Como $f(–1) = –1$ y $f(0) = 2$, la función se anula una vez en (–1, 0).

En (0, 1), la función es decreciente, ya que $f'(x) < 0$, y como $f(1) = 0$, solo se anula en $x = 0$.

Para encontrar la solución de $x^3+2x+2=0$ se hallan algunos valores de *f* en (–1, 0): $f(–0,5) = 0,875$; $f(–0,7) = 0,257$; $f(–0,8) = –0,112$. Así pues, la raíz está entre –0,8 y –0,7, y, por tanto, es $x \approx –0,7$.

7.60. En una empresa se han modelizado los beneficios obtenidos, en miles de euros, por la venta de *x* cientos de objetos mediante la función *f*, definida en (0, +∞) por $f(x) = –2x + (e^2 – 1) \ln x + 2$.

a) Comprueba que $f(1) = 0$ y $f(e^2) = 0$.

b) Obtén los valores de *x* para los que el beneficio obtenido es positivo o cero.

c) Obtén el valor de *x* (redondeado a la unidad) por el que se obtiene beneficio máximo.

a) $f(1) = –2 + (e^2 – 1) \ln (1) + 2 = 0$, $f(e^2) = –2e^2 + (e^2 – 1) \ln (e^2) + 2 = –2e^2 + 2(e^2 – 1) + 2 = 0$

b) Hay que calcular los valores que anulan la derivada: $f'(x)=-2+\frac{e^2-1}{x}=\frac{-2x+e^2-1}{x}=0$ si $x=\frac{e^2-1}{2}$.

En el apartado anterior se ha obtenido que la función se anula en $x = 1$ y $x = e^2$. Como es continua y derivable, aplicando el teorema de Rolle, la derivada se anula entre esos dos valores. Como $f'(x) = 0$ solo tiene una solución, la función únicamente se anula en esos dos valores.

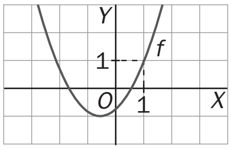
Por tanto, hay que estudiar el signo de *f* en los intervalos (0, 1), (1, e^2) y (e^2, +∞), obteniéndose que es positiva en (1, e^2) y negativa en (0, 1) ∪ (e^2, +∞).

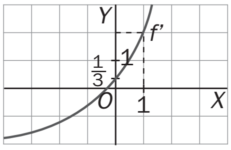
c) Es $x=\frac{e^2-1}{2}\approx 3$.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

7.1. Las gráficas de una función *f* y de su derivada *f '* se muestran a continuación.





¿Cuánto vale la pendiente de la tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 1?

A) 1

B) –1

C) 2

D) $\frac{1}{3}$

E) Falta información para responder

La respuesta correcta es C ya que la pendiente de la tangente a *f* en el punto de abscisa 1 es *f* ’(1).

7.2. Sea *f* la función definida en (0, +∞) por la fórmula $f(x)=\frac{2}{x^2}-3x+5$. La ecuación de la tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 1 es:

A) $y = -7x + 3$

B) $y = -7x + 11$

C) $y = x + 3$

D) $y=-\frac{4}{x^3}-3$

E) Nada de lo anterior.

La respuesta correcta es B.

7.3. Sea $y = g(x)$ una función continua estrictamente creciente en el intervalo [5, 7] tal que $g(5) = -3$ y $g(7) = 1$.

Se considera h(x) = $\frac{1}{g(x)}$.

A) $h(x)$ no está definida en [5, 7]

B) $h(x)$ es estrictamente decreciente en [5, 7].

C) $h(x)$ es estrictamente creciente en [5, 7].

D) $h(x)$ puede anularse alguna vez en [5, 7].

E) El mínimo valor de $h(x)$ en [5, 7] es $-\frac{1}{3}$.

La respuesta correcta es A. Como g(x) es continua en [5,7], $g(5)<0$ y $g(7)>0 \Rightarrow \exists c\in$ [5,7] tal que $g(c)=0 \Rightarrow h(x)=\frac{1}{g(x)}$ no está definida en $c\in$ [5,7].

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

7.4. De una función *f*, derivable en R, se muestra su tabla de variación:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

A) Para cualquier número real x, $f(x) \geq -4$.

B) La ecuación $f(x) = -5$ admite al menos una solución en R.

C) La ecuación $f(x) = 0$ admite una única solución en el intervalo $[-1, 2]$.

D) La tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 2 es paralela a la recta $y = x$.

E) $f'(4) < 0$.

Las respuestas correctas son A y C.

7.5. Si f es la función polinómica dada por $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$:

A) La ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en R.

B) La ecuación $f(x) = 1$ admite exactamente dos soluciones en el intervalo $[-1, +\infty)$.

C) Si $x \in [-1, 1]$, entonces $f(x) \leq 4$.

D) Si $x < 0$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo.

E) Si $x > 0$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba.

Las respuestas correctas son A,B y C.

7.6. Sea f la función definida en R por: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

A) f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

B) f es estrictamente creciente en R.

C) Para cualquier número real a, la ecuación $f(x) = a$ admite una única solución.

D) f no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

E) $f''(0^-) = 0$.

Las respuestas correctas son B y D.

7.7. Sea $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$ la función definida en $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

A) f es derivable en $\frac{1}{2}$ y $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

B) $f'(1) = \frac{3}{2}$

C) f es estrictamente creciente en $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

D) f presenta un punto con tangente horizontal si $x = \frac{1}{4}$.

E) f no presenta ningún punto con tangente horizontal.

Las respuestas correctas son B, C y E.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

7.8. Sea *f* una función definida en R, derivable.

a) $f'(x) > 0$

b) *f* es estrictamente creciente en R.

A) a $\Leftrightarrow$ b.

B) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a.

C) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b.

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior.

La relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar:

7.9. Para encontrar el número que mide la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función $f(x) = ax^2 + bx + \ln(cx)$ en el intervalo $[1, d]$ se tienen los siguientes datos:

a) El valor de a.

b) El valor de b.

c) El valor de c.

d) El valor de d.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es E.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la siguiente cuestión:

7.10. Para probar que $y = f(x)$ presenta un punto de inflexión con tangente horizontal en $x = a$, sabemos que:

a) $f'(a) = 0$

b) $f''(a) = 0$.

A) Cada información es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen faltan más datos.

La respuesta correcta es la E.