6 Derivadas

ACTIVIDADES INICIALES

6.I. Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Horizontal y que pase por el punto *A*(1, 4).

b) Decreciente y que pase por el punto *A*(2, –3).

c) Creciente y que pase por el origen.

d) Que pase por los puntos *A*(2, 4) y *B*(–3, –8).

e) Paralela a *y* = –2*x* + 1 y que corte al eje *X* en el punto *A*(1, 0).

f) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que pase por el punto *A*(1, 6).

a) $y = 4$

b) $y = -x - 1$

c) $y = 3x$

d) $\dfrac{x-2}{-3-2} = \dfrac{y-4}{-8-4} \Rightarrow y = \dfrac{12}{5}x - \dfrac{4}{5}$

e) $y = -2x + 2$

f) $y = x + 5$

6.II. Dada la expresión $A = \dfrac{\sqrt{x^2y^3}}{z}$, calcula ln*A* y expresa el resultado mediante sumas y restas de logaritmos.

$$\ln A = \ln\frac{\sqrt{x^2y^3}}{z} = \ln\sqrt{x^2y^3} - \ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2y^3) - \ln z = \frac{1}{2}\ln x^2 + \frac{1}{2}\ln y^3 - \ln z = \ln x + \frac{3}{2}\ln y - \ln z$$

6.III. Transforma las siguientes expresiones en un solo logaritmo:

a) 2log 5 – 5log *a* + 2log *b* – log *c*

b) $\dfrac{3\ln a}{2} + \dfrac{\ln b}{2} - \ln c$

a) 2log 5 – 5log *a* + 2log *b* – log *c* = $\log 5^2 - \log a^5 + \log b^2 - \log c = \log 5^2 + \log b^2 - (\log a^5 + \log c) =$

$$= \log(5^2 \cdot b^2) - \log(a^5 \cdot c) = \log\frac{5^2 \cdot b^2}{a^5 \cdot c}$$

b) $\dfrac{3\ln a}{2} + \dfrac{\ln b}{2} - \ln c = \ln a^{\frac{3}{2}} + \ln b^{\frac{1}{2}} - \ln c = \ln\dfrac{\sqrt{a^3b}}{c}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1. La distancia recorrida por un autobús en los cinco primeros segundos desde que sale de una parada viene dada por la función *f*(*t*) = *t*².

¿Qué velocidad llevará en el instante *t* = 3 segundos?

La velocidad en el instante *t* = 3 es la tasa de variación instantánea en *t* = 3:

$$v(3) = TVI\, f(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h} = 6 \text{ m/s}$$

6.2. La emisión diaria de gases, en toneladas, en una fábrica viene dada por la expresión $n(t) = \dfrac{t}{8}(20-2t)$ con 0 ≤ *t* ≤ 10, estando *t* medido en horas. Calcula la tasa de variación instantánea de *n*(*t*) para *t* = 5 horas.

$$TVI\, n(5) = \lim_{h\to 0}\frac{n(5+h)-n(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{5+h}{8}(20-2(5+h)) - \frac{50}{8}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2h^2}{8}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{4} = 0$$

6.3. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 5$.

La pendiente de la recta tangente es $f'(5)$.

$$f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(5+h)^2-3(5+h)-10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{25+10h+h^2-15-3h-10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+7)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+7) = 7$$

La recta pasa por el punto de tangencia $A(5, f(5)) = A(5, 10)$. La ecuación de la recta tangente es:

$y - 10 = 7(x - 5)$, es decir, $y = 7x - 25$.

6.4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (3x-2)^2$, que es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 5$.

La pendiente de la recta tangente es 6 porque es paralela a $y = 6x - 5$. Calculemos el punto de tangencia $A(a, f(a))$. El punto de tangencia debe cumplir que $f'(a) = 6$; por tanto:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3(a+h)-2)^2-(3a-2)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9a^2+9h^2-18ah+4-12a-12h-9a^2-4+12a}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(9h+18a-12)}{h} = 18a-12$$

Como $18a - 12 = 6$, $a = 1$. El punto de tangencia es $A(1, f(1)) = A(1, 1)$.

La recta tangente es $y - 1 = 6(x - 1)$, es decir, $y = 6x - 5$.

6.5. Halla la función derivada de:

a) La función constante: $f(x) = c$

b) La función identidad: $f(x) = x$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{c-c}{h} = 0$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

c) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-h}{(x+h)xh} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-1}{(x+h)x} = \dfrac{-1}{x^2}$

6.6. Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

b) $f(x) = (x^3 - x)^7$

c) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x^4+1}\right)^5$

d) $f(x) = (x+2)\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^4$

a) $f'(x) = \dfrac{0\cdot(x+1)-1\cdot 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

b) $f'(x) = 7(x^3-x)^6(3x^2-1)$

c) $f'(x) = 5\left(\dfrac{x+1}{x^4+1}\right)^4\left(\dfrac{x^4+1-(x+1)4x^3}{(x^4+1)^2}\right) = 5\left(\dfrac{x+1}{x^4+1}\right)^4 \dfrac{1-4x^3-3x^4}{(x^4+1)^2}$

d) $f'(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^4 + (x+2)4\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3\left(\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}\right) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^4 + \dfrac{4(x+2)x^3}{(x+1)^5}$

6.7. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

b) $f(t) = (t^3+2)^{90}$

c) $f(t) = \left(\sqrt{t}+1\right)^{100}$

d) $f(x) = e^{2x-1}$

e) $f(z) = \dfrac{\sqrt{z}}{e^z}$

f) $f(t) = t\cos t + \text{tg}\, t$

g) $f(x) = 2^{\sqrt{x}-7}$

h) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$

i) $f(\theta) = \dfrac{1}{1+e^{-\theta}}$

j) $f(y) = e^{\left(e^{y^2}\right)}$

k) $f(w) = (2w^2-1)\, e^{w^2}$

l) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

m) $f(x) = e^{\cos x}$

n) $f(x) = \text{arctg}\sqrt{x}$

o) $f(x) = \sqrt{\text{arctg}\, x}$

p) $f(z) = \text{tg}\, e^z$

q) $f(x) = \text{sen}^4 x$

r) $f(x) = \cos^3 (e^x - 1)$

s) $f(x) = \text{sen}^7\left(\left(x^7+1\right)^7\right)$

t) $f(\theta) = e^\theta \,\text{sen}\, 2\theta$

u) $f(x) = \dfrac{x\left(\cos x + e^x\right)}{e^x}$

v) $f(x) = \text{tg}\sqrt{x}$

a) $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f'(t) = 90(t^3+2)^{89}\cdot 3t^2 = 270t^2(t^3+2)^{89}$

c) $f'(t) = 100\left(\sqrt{t}+1\right)^{99}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \dfrac{50\left(\sqrt{t}+1\right)^{99}}{\sqrt{t}}$

d) $f'(x) = 2e^{2x-1}$

e) $f'(z) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot e^z - \sqrt{z}\cdot e^z}{e^{2z}} = \dfrac{1-2z}{2\sqrt{z}e^z}$

f) $f'(t) = \cos t + t(-\text{sen}\, t) + \dfrac{1}{\cos^2 t} = \cos t - t\,\text{sen}\, t + \dfrac{1}{\cos^2 t}$

g) $f'(x) = \ln 2\cdot 2^{\sqrt{x}-7}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} + \sqrt{x}\cdot e^{-x}\cdot(-1) = \dfrac{e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$

i) $f'(\vartheta) = \dfrac{-(e^{-\vartheta})\cdot(-1)}{(1+e^{-\vartheta})^2} = \dfrac{e^{-\vartheta}}{(1+e^{-\vartheta})^2}$

j) $f'(y) = e^{e^{y^2}}\cdot e^{y^2}\cdot 2y$

k) $f'(w) = 4w\cdot e^{w^2} + (2w^2-1)\cdot e^{w^2}\cdot 2w = 2e^{w^2}\cdot(2w^3+w)$

l) $f'(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{2\sqrt{1-\cos x}}$

m) $f'(x) = e^{\cos x}\cdot(-\text{sen}\, x) = -e^{\cos x}\text{sen}\, x$

n) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

o) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\text{arctg}\, x}}\cdot\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{\text{arctg} x}}$

p) $f'(z) = \dfrac{e^z}{\cos^2 e^z}$

q) $f'(x) = 4\text{sen}^3 x\cdot\cos x$

r) $f'(x) = -3\cos^2(e^x-1)\cdot\text{sen}(e^x-1)\cdot e^x$

s) $f'(x) = 7\text{sen}^6(x^7+1)^7\cdot 7(x^7+1)^6\cdot 7x^6\cdot\cos(x^7+1)^7 =$
$= 343x^6(x^7+1)^6\text{sen}^6(x^7+1)^7\cdot\cos(x^7+1)^7$

t) $f'(\vartheta) = e^\vartheta\text{sen}\, 2\vartheta + e^\vartheta\cos(2\vartheta)\cdot 2 =$
$= e^\vartheta(\text{sen}\, 2\vartheta + 2\cos 2\vartheta)$

u) $f'(x) = \dfrac{\cos x + e^x - x(\text{sen}\, x + \cos x)}{e^x}$

v) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

6.8. ¿Hay algún número *a* para el que la función *f* sea derivable en *x* = 2? $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \le 2 \\ ax & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 2$, debe ser obligatoriamente continua en $x = 2$, aunque esto no sea suficiente.

Es continua en $x = 2$ cuando los límites laterales en dicho punto son iguales y coinciden con el valor de la función en el punto:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2+1) = 5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} ax = 2a$$

$f(2) = 5$

Así pues, para que *f* sea continua en $x = 2$, debe ser $2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

La función es, por tanto, $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \le 2 \\ \frac{5}{2}x & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Se estudia ahora si esta función es derivable en $x = 2$.

La derivada de la función para *x* distinto de 2 es: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ \frac{5}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para $x = 2$ se observa que: $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x = 4$ y $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

Como los límites laterales de la función derivada no coinciden en $x = 2$, *f* no es derivable en ese punto.

Por tanto, no existe ningún *a* para el que la función sea derivable en $x = 2$.

6.9. Utiliza diferenciales para aproximar $e^{0,01}$.

Se considera la función $f(x) = e^x$. Hay que aproximar $f(x + h)$ para $h = \Delta x = dx = 0,01$ y $x = 0$.

Así pues, $f(x + h) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$

$f'(x) = e^x$, con lo que $f'(0) = 1$. Por otra parte, $f(0) = 1$.

Entonces, $f(0 + h) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0,01$, es decir, $f(0 + h) \approx 1 + 1 \cdot 0,01 = 1,01$

Se puede comprobar la aproximación obtenida con el valor de $e^{0,01}$ en la calculadora.

En ella, $e^{0,01} = 1,0100502$.

Así pues, utilizando diferenciales, la aproximación es realmente buena.

6.10. Calcula aproximadamente 5 sen(0,01) – 2 $\cos^3$(0,01).

Se considera la función $f(x) = 5\operatorname{sen}x - 2\cos^3 x$ y se aproxima $f(x + h)$ para $h = \Delta x = dx = 0,01$ y $x = 0$.

La derivada de la función es $f'(x) = 5 \cos x + 6 \cos^2 x \operatorname{sen} x$, de modo que $f'(0) = 5$.

El valor de la función en $x = 0$, $f(0) = -2$.

Como la aproximación lineal es $f(0,01) = f(0) + f'(0) \cdot (0,01 - 0)$, se obtiene:

$f(0,01) = -2 + 5 \cdot 0,01 = -1,95$

Se puede comparar la aproximación que se obtiene con el valor de la calculadora:

$5 \operatorname{sen}(0,01) - 2 \cos^3(0,01) = -1,9497008$

Por tanto, la aproximación es muy buena.

EJERCICIOS

Tasa de variación instantánea

6.11. Sea la recta de ecuación *f*(*x*) = 2*x* – 5, se pide:

a) Calcula TVM *f*[2, 7].

b) Calcula TVI *f*(2).

c) Calcula TVM *f*[*a*, *a* + *h*].

d) Calcula TVI *f*(*a*).

e) Razona por qué se obtiene siempre el mismo resultado.

a) $TVM\, f[2,7] = \dfrac{f(7)-f(2)}{7-2} = \dfrac{9-(-1)}{5} = 2$

b) $TVIf(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(2+h)-5-(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = 2$

c) $TVM\, f[a,a+h] = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{2(a+h)-5-(2a-5)}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$

d) $TVIf(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(a+h)-5-(2a-5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = 2$

e) Las tasas de variación miden la pendiente de las rectas, en unos casos, de rectas secantes, y en otros, de rectas tangentes. Como la función *f*(*x*) = 2*x* – 5 es una recta de pendiente 2, las tasas de variación valen 2.

6.12. Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Calcula la tasa de variación media de *f*(*x*) en el intervalo [1, 1 + *h*] y, posteriormente, calcula la tasa de variación instantánea de *f* en 1.

$TVM\, f[1,1+h] = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \dfrac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \dfrac{-h}{2h(2+h)} = \dfrac{-1}{2(2+h)}$

$TVI\, f(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{4}$

Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Función derivada

6.13. Calcula la derivada, por definición, de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x$ en *x* = 1 b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en *x* = –1 c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ en *x* = 4

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(1+h)^2-4(1+h)-(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(3h+2)}{h} = 2$

b) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{h+2}-\frac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(h+2)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(h+2)} = -\dfrac{1}{4}$

c) $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+2h}-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{9+2h}-3)(\sqrt{9+2h}+3)}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{9+2h}+3} = \dfrac{1}{3}$

6.14. Si la recta tangente a *y* = *f*(*x*) en el punto (5, 3) pasa por el punto (0, 1), calcula *f′*(5).

La derivada *f* ′(5) es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (5, 3) y (0, 1), es decir: $f'(5) = \dfrac{3-1}{5-0} = \dfrac{2}{5}$

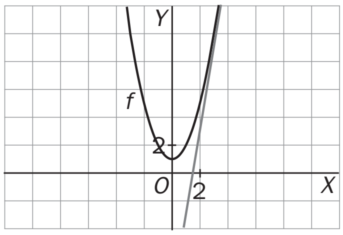
6.15.(TIC) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto indicado. Comprueba a continuación tu respuesta, esbozando tanto la gráfica de la función como la de la recta tangente:

a) $f(x) = x^2 + 1$ **en** $x = 3$

b) $g(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ **en** $x = 0$

a) La pendiente de la recta tangente es:



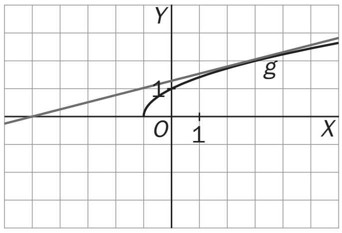
$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2+1-10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+6)}{h} = 6$$

El punto de tangencia es $A(3, f(3)) = A(3, 10)$.

La recta tangente es $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, o sea: $y - 10 = 6(x - 3)$,

es decir, $y = 6x - 8$.

b) La pendiente de la recta tangente es:



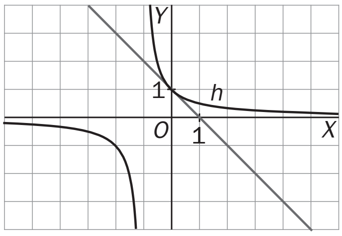
$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4}$$

El punto de tangencia es $B(3, f(3)) = B(3, 2)$.

La recta tangente es $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, o sea: $y - 2 = \frac{1}{4}(x-3)$, es decir, $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

c) La pendiente de la recta tangente es:



$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h+1}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h+1} = -1$$

El punto de tangencia es $C(0, f(0)) = C(0, 1)$.

La recta tangente es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, o sea: $y - 1 = -x$, es decir,

$y = -x + 1$.

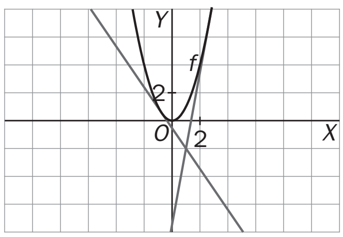
6.16.Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^2$ trazadas desde el punto $P(1, -2)$. Representa gráficamente la parábola y las dos tangentes obtenidas.

La pendiente de la recta tangente en el punto $A(a, a^2)$ es $f'(a) = 2a$.

La ecuación de la recta tangente a la parábola en ese punto es $y - a^2 = 2a(x - a)$, es decir, $y = 2ax - a^2$.

Si queremos que pase por el punto $P(1, -2)$, debe ser $-2 = 2a - a^2$, cuyas soluciones son $a = 1 + \sqrt{3}$

y $a = 1 - \sqrt{3}$, y las tangentes buscadas son:



$y = 2\left(1+\sqrt{3}\right)x - 2\left(2+\sqrt{3}\right)$

$y = 2\left(1-\sqrt{3}\right)x - 2\left(2-\sqrt{3}\right)$

Derivada de las operaciones con funciones

6.17. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 3x – 1$, calcula:

a) $f'(x)$ **y** $g'(x)$ **c)** $(f+g)'(x)$ **e)** $(f^2)'(x)$ **g)** $\left(\frac{g}{f}\right)'(x)$

b) $(5f)'(x)$ **d)** $(2f-3g)'(x)$ **f)** $(f\cdot g)'(x)$ **h)** $\left(\frac{5}{g^2}\right)'(x)$

a) $f'(x) = 2x + 2$ y $g'(x) = 3$

b) $(5f)'(x) = 5f'(x) = 10x + 10$

c) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 5$

d) $(2f-3g)'(x) = 2f'(x) - 3g'(x) = 2(2x+2) - 9 = 4x - 5$

e) $(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x) = 2(x^2+2x+1)(2x+2)$

f) $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (2x+2)(3x-1) + 3(x^2+2x+1) = 9x^2 + 10x + 1$

g) $\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{3(x^2+2x+1) - (3x-1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} = \frac{-3x^2+2x+5}{\left(x^2+2x+1\right)^2}$

h) $\left(\frac{5}{g^2}\right)'(x) = \frac{-10g'(x)}{(g(x))^3} = \frac{-30}{(3x-1)^3}$

6.18. Sabiendo que $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$, $g(2) = 2$, $g'(2) = 5$ y $g'(1) = 0$, calcula:

a) $(f\circ g)'(2)$ **c)** $\left(\sqrt{g}\right)'(2)$ **e)** $\left(\frac{1}{f}\circ g\right)'(2)$

b) $(f^2\circ g)'(2)$ **d)** $(g\circ f)'(2)$ **f)** $(f^n)'(2)$

a) $(f\circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(2)\cdot 5 = 3\cdot 5 = 15$

b) $(f^2\circ g)'(2) = 2f(g(2))f'(g(2))g'(2) = 2f(2)\cdot f'(2)\cdot 5 = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 5 = 30$

c) $\left(\sqrt{g}\right)'(2) = \frac{g'(2)}{2\sqrt{g(2)}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

d) $(g\circ f)'(2) = g'(f(2))f'(2) = g'(1)\cdot 3 = 0\cdot 3 = 0$

e) $\left(\frac{1}{f}\circ g\right)'(2) = \left(\frac{1}{f}\right)'(g(2))g'(2) = -\frac{f'(g(2))}{(f(g(2)))^2}\cdot g'(2) = -\frac{f'(2)}{(f(2))^2}\cdot 5 = -\frac{3}{1^2}\cdot 5 = -15$

f) $(f^n)'(2) = nf^{n-1}(2)f'(2) = n\cdot 1^{n-1}\cdot 3 = 3n$

6.19. Encuentra una fórmula para hallar la derivada de $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ utilizando la regla de la cadena.

$F(x)$ es una función compuesta. Si $g(x) = \frac{1}{x}$, entonces:

$F(x) = (g\circ f)(x)$ y, por tanto, aplicando la regla de la cadena y recordando que la derivada de $g(x) = \frac{1}{x}$ es

$g'(x) = \frac{-1}{x^2}$, $F'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = \frac{-1}{(f(x))^2}\cdot f'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

6.20. Calcula aplicando la regla de la cadena las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(\sqrt{x}+x\right)^5$ **b)** $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^3$

a) $f'(x)=5\left(\sqrt{x}+x\right)^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)$

b) $f'(x)=3\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2\dfrac{x-5-(x+3)}{(x-5)^2}=3\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2\dfrac{-8}{(x-5)^2}=-\dfrac{24(x+3)^2}{(x-5)^4}$

Derivada de las funciones elementales

6.21. ¿Para qué valores de *x* se anula la derivada de $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2-5x$ **?**

La derivada es $f'(x)=x^2-4x-5$.

Para hallar los valores de *x* que la anulan, se iguala a 0 y se resuelve la ecuación: $x^2-4x-5=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=5\end{cases}$$

Por tanto, se anula si $x=-1$ o $x=5$.

6.22. Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

a) $f'(x)=\dfrac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}=\dfrac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{(x+2)^2}$

c) $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}}=\dfrac{1}{2(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}}$

d) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x-(x+1)}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}=\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}$

6.23. Calcula la derivada de estas funciones (te será útil manejar las propiedades de los logaritmos):

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **c)** $f(x)=\sqrt{\ln x}$

b) $f(x)=\ln\left(x^2\right)$ **d)** $f(x)=\ln\left[(x+5)(2x-1)^2\right]$

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln 1-\ln x=-\ln x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x}$

b) $f(x)=\ln\left(x^2\right)=2\ln x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x}$

c) $f(x)=\sqrt{\ln x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

d) $f(x)=\ln\left[(x+5)(2x-1)^2\right]=\ln(x+5)+2\ln(2x-1)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{4}{2x-1}$

6.24. (PAU) Se considera la función $f(x)=ax^3+b\cdot\ln x$ **, siendo *a* y *b* parámetros reales.**
Determina los valores de *a* y *b* sabiendo que *f*(1) = 2 y que la derivada de *f*(*x*) es nula en *x* = 1.

Como $f(1)=2$: $2=a\cdot 1^3+b\ln 1=a$. Por tanto, $a=2$, y la función es $f(x)=2x^3+b\ln x$.

La derivada es $f'(x)=6x^2+\dfrac{b}{x}$, y como se anula en $x=1$: $0=f'(1)=6\cdot 1^2+b$. Por tanto, $b=-6$.

Los valores de *a* y *b* para que se cumplan las condiciones son $a=2$ y $b=-6$.

6.25. Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = e^{7x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{e^x}$

c) $f(x) = e^{x^2} \cdot e^{-3x} \cdot e^2$

d) $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{3x}}{e^x + 1}$

a) $f'(x) = 7e^{7x-1}$

b) $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$

c) $f(x) = e^{x^2} \cdot e^{-3x} \cdot e^2 = e^{x^2-3x+2} \Rightarrow f'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{3x}}{e^x + 1} = \dfrac{e^{2x}(1+e^x)}{e^x + 1} = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$

6.26. (PAU) Calcula $f'(2)$ siendo f la función dada por $f(x) = \dfrac{4}{x^2} + 8x - x^2 - 12$, ($x \neq 0$).

La función derivada es $f'(x) = \dfrac{-8}{x^3} + 8 - 2x$, y entonces, $f'(2) = \dfrac{-8}{2^3} + 8 - 2 \cdot 2 = 3$.

6.27. (PAU) Calcula $f'(-0, 5)$ siendo f la función dada por $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 53x + 150$, ($x \neq 0$).

La función derivada es $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3} - 53$, y entonces, $f'(-0,5) = 2 \cdot (-0,5) - \dfrac{2}{(-0,5)^3} - 53 = -1 + 16 - 53 = -38$.

6.28. (PAU) Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3}{(2x-5)^2} + \ln(1-x)$

b) $g(x) = \dfrac{e^x}{x^3 + 1}$

a) $f'(x) = \dfrac{-3 \cdot 2 \cdot (2x-5) \cdot 2}{(2x-5)^4} + \dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{-12}{(2x-5)^3} - \dfrac{1}{1-x}$

b) $g'(x) = \dfrac{e^x(x^3+1) - 3x^2e^x}{(x^3+1)^2} = \dfrac{e^x(x^3 - 3x^2 + 1)}{(x^3+1)^2}$

6.29. (PAU) Deriva las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{6} - 8x^2 + \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = xe^{3x}$

c) $f(x) = x(5-x^2)^4$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - 8$

e) $f(x) = e^{x^3}$

f) $f(x) = x^2 - e^x$

g) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

h) $f(x) = 5\sqrt{\ln x}$

i) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x^2+1}$

j) $f(x) = \dfrac{6-x^5}{x^6}$

k) $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$

l) $f(x) = \sqrt{x^3}$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{6} - 16x - \dfrac{1}{x^2}$

b) $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = e^{3x}(1+3x)$

c) $f'(x) = (5-x^2)^4 - x \cdot 4(-2x)(5-x^2)^3 = (5-x^2)^3(5+7x^2)$

d) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{4}$

e) $f'(x) = 3x^2e^{x^3}$

f) $f'(x) = 2x - e^x$

g) $f'(x) = \dfrac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$

i) $f'(x) = \dfrac{2x}{(3x^2+1)^2}$

j) $f(x) = \dfrac{6-x^5}{x^6} = \dfrac{6}{x^6} - \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{36}{x^7} + \dfrac{1}{x^2}$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

l) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

6.30.(PAU) Calcula $g'(3)$ siendo $g(x) = 2x \cdot e^{3x-1}$.

La función derivada es $g'(x) = 2e^{3x-1} + 6xe^{3x-1} = e^{3x-1}(2+6x)$, y entonces, $g'(3) = e^8(2+6\cdot 3) = 20e^8$.

6.31.(PAU) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 - 3x^2$ en $x = -1$.

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 6x$, y la pendiente de la recta tangente es $f'(-1) = 9$.

El punto de tangencia es $A(-1, f(-1)) = A(-1, -4)$.

Así pues, la recta tangente es $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow y - (-4) = 9(x + 1) \Rightarrow y = 9x + 5$.

6.32.(PAU) Halla los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto (1, 5) sea la recta $y = 3x + 2$.

Se sabe que $f'(1) = 3$ porque es la pendiente de su recta tangente. Como $f'(x) = 2ax$, entonces:

$3 = f'(1) = 2a$, de donde $a = \dfrac{3}{2}$. La función es $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - b$.

También se sabe que el punto (1, 5) pertenece a la gráfica de dicha función; por tanto, $f(1) = 5$: $5 = f(1) = \dfrac{3}{2} - b$,

y entonces, $b = \dfrac{3}{2} - 5 = -\dfrac{7}{2}$. Por tanto, $a = \dfrac{3}{2}$ y $b = -\dfrac{7}{2}$.

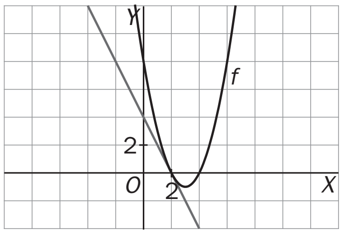
6.33.(PAU) Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela al eje de abscisas?

b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(2, 0)$.

a) Para que la tangente sea paralela al eje de abscisas, su pendiente tiene que ser 0. Como la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en el punto de tangencia, hay que encontrar el valor de x que anula la primera derivada: $f'(x) = 2x - 6$, y se anula si $x = 3$.

Entonces, el punto $(3, f(3)) = A(3, -1)$ es el punto de la parábola cuya tangente es paralela al eje de abscisas.



b) La recta pedida es $y - 0 = f'(2)(x - 2)$, es decir, $y = -2(x - 2)$, o sea, $y = -2x + 4$.

6.34.¿Para qué valores de x se anula la derivada de las siguientes funciones?

a) $f(x) = 5x - 3$ **c)** $f(x) = e^{2x}$ **e)** $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ **g)** $f(x) = e^{x^2-6x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$ **d)** $f(x) = \ln(3x+7)$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ **h)** $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

a) $f'(x) = 5$ no se anula nunca.

b) $f'(x) = \dfrac{2(x+3) - 2x}{(x+3)^2} = \dfrac{6}{(x+3)^2}$ no se anula nunca.

c) $f'(x) = 2e^{2x}$ no se anula nunca.

d) $f'(x) = \dfrac{3}{3x+7}$ no sea anula nunca.

e) $f'(x) = 6x - 5$ se anula si $x = \dfrac{5}{6}$.

f) $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ se anula si $x = 0$ o si $x = -2$.

g) $f'(x) = (2x - 6)e^{x^2-6x}$ se anula si $x = 3$.

h) $f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2 - 2x}$ se anula si $x = 1$, pero este valor no pertenece al dominio de la función, ya que da lugar al logaritmo de un número negativo. Así pues, la derivada no se anula nunca.

6.35.(PAU) Dada la función $f(x) = ax + b + \dfrac{3}{x}$, calcula a y b de manera que la gráfica de f pase por el punto (3, 4) y tenga tangente horizontal en dicho punto.

Como $f(3) = 4 \Rightarrow 3a + b + 1 = 4$

Además, $f'(3) = 0$ y la derivada es $f'(x) = a - \dfrac{3}{x^2}$; entonces, $a - \dfrac{1}{3} = 0$. Despejando, $a = \dfrac{1}{3}$.

Al sustituir el valor de a en la ecuación anterior se obtiene: $3 \cdot \dfrac{1}{3} + b + 1 = 4 \Rightarrow b = 2$

Por tanto, $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = 2$.

6.36. Sean las funciones $f(x) = \dfrac{1-x}{x-2}$ y $g(x) = x^2 - 5x + 4$, halla la recta tangente a cada una de sus gráficas en el punto de abscisas $x = 3$.

Las derivadas son $f'(x) = \dfrac{-(x-2)-(1-x)}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ y $g'(x) = 2x - 5$. Las tangentes son:

$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, o sea, $y - (-2) = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 5$

$y - g(3) = g'(3)(x - 3)$, o sea, $y - (-2) = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 5$

Por tanto, las gráficas de estas funciones tienen tangente común en el punto (3, –2). Se dice entonces que esas gráficas son tangentes en el punto (3, –2).

6.37. Encuentra las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 - x - 2$ trazadas desde el punto exterior $A(-1, -16)$. Para eso debes hallar previamente los puntos de tangencia.

Sea el punto $B(b, f(b)) = B(b, b^2 - b - 2)$ el punto de tangencia.

La pendiente de la recta AB se puede calcular de dos formas distintas:

Pendiente de la recta que pasa por dos puntos: $m = \dfrac{f(b) - f(a_2)}{b - a_1} = \dfrac{b^2 - b - 2 - (-16)}{b - (-1)}$

Pendiente de la recta tangente en el punto $B(b, b^2 - b - 2)$: $m = f'(b) = 2b - 1$

Igualando estas expresiones se calcula el valor de b:

$$\frac{b^2 - b + 14}{b + 1} = 2b - 1 \Rightarrow b^2 - b + 14 = 2b^2 + 2b - b - 1 \Rightarrow b^2 + 2b - 15 = 0$$

$$b = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Así pues, hay dos puntos de tangencia: $B_1(-5, 28)$ y $B_2(3, 4)$.

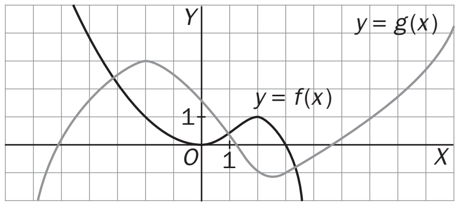
Las pendientes de las rectas tangentes en estos puntos son: $f'(-5) = 2 \cdot (-5) - 1 = -11$

$f'(3) = 2 \cdot (3) - 1 = 5$

La tangente en B_1 es: $y - f(-5) = f'(-5)(x - (-5))$, o sea, $y - 28 = -11(x + 5) \Rightarrow y = -11x - 27$

La tangente en B_2 es: $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, o sea, $y - 4 = 5(x - 3) \Rightarrow y = 5x - 11$

6.38. Considera la función $h(x) = f(x)g(x)$, donde las gráficas de f y g son las que te damos a continuación:



I. a) Calcula $h(-2)$ y $h(3)$.

b) Calcula aproximadamente $f'(-2)$, $f'(3)$, $g'(-2)$ y $g'(3)$.

c) Calcula aproximadamente $h'(-2)$ y $h'(3)$.

II. Con las mismas gráficas del apartado anterior, sea $c(x) = f(g(x))$.

a) Calcula $c(-2)$ y $c(3)$.

b) ¿Es $c'(-3)$ positivo, negativo o cero? Explica cómo puedes saberlo.

c) ¿Es $c'(-1)$ positivo, negativo o cero? Explica cómo lo averiguas.

I. a) $h(-2) = f(-2)g(-2) = 1 \cdot 3 = 3$

$h(3) = f(3)g(3) = 0$

b) $f'(-2) = -1$, $f'(3) = -1$, $g'(-2) = 0$ y $g'(3) = \frac{1}{2}$

c) $h'(-2) = f'(-2)g(-2) + f(-2)\,g'(-2) = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = -3$

$h'(3) = f'(3)g(3) + f(3)\,g'(3) = -1 \cdot (-1) + 0 = 1$

II. a) $c(-2) = f(g(-2)) = f(3) = 0$ $\qquad$ $c(3) = f(g(3)) = f(-1) = \frac{1}{4}$

b) $c'(-3) = f'(g(-3))g'(-3) = f'\left(\frac{5}{2}\right)g'(-3)$

$f'\left(\frac{5}{2}\right)$ es negativo (la tangente tiene pendiente negativa en ese punto), y $g'(-3)$ positiva; luego $c'(-3)$ es negativo.

c) $c'(-1) = f'(g(-1))\,g'(-1) = f'\left(\frac{5}{2}\right)g'(-1)$

$f'\left(\frac{5}{2}\right)$ es negativo (la tangente tiene pendiente negativa en ese punto), y $g'(-1)$ también; luego $c'(-1)$ es positivo.

6.39. (PAU) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{a - bx}$, siendo a y b parámetros reales.

Determina los valores de los parámetros a y b para los que $f(2) = -4$, y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 6$ sea horizontal.

$f(2) = -4 \Rightarrow \dfrac{4}{a - 2b} = -4 \Rightarrow a - 2b = -1$

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{2x(a - bx) + bx^2}{(a - bx)^2}$.

Como se sabe que $f'(6) = 0$, entonces: $0 = f'(6) = \dfrac{12(a - 6b) + 36b}{(a - 6b)^2} \Rightarrow 12a - 36b = 0 \Rightarrow a - 3b = 0$

Se resuelve el sistema obtenido: $\left.\begin{array}{l} a - 2b = -1 \\ a - 3b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a - 2b = -1 \\ -a + 3b = 0 \end{array}\right\} \\ \hline b = -1 \Rightarrow a = 3b = 3\cdot(-1) = -3 \end{array}$

Por tanto, $a = -1$ y $b = -3$.

Derivadas laterales

6.40.Calcula las derivadas laterales en x = 1 (si existen) y decide si las funciones son derivables en x = 1.

a) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3 & \text{si } x\le 1\\ (x-1)^2 & \text{si } x>1\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\le 1\\ 2x & \text{si } x>1\end{cases}$

a) $f'(1^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h-1)^3-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3}{h}=0$

$f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h-1)^2-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h}=0$

Como las derivadas laterales en x = 1 coinciden, la función es derivable en ese punto y $f'(1)$ = 0.

b) $f'(1^-)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{2h+h^2}{h}=2$ y $f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(h+1)-1}{h}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2h+2-1}{h}=+\infty$

La función no es derivable en x = 1. Se observa que ni siquiera es continua en x = 1.

6.41.A Rocío le han pedido que calcule, si existe, $f'(3)$, siendo f la función: $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{si } x\le 3\\ x^2-5x & \text{si } x>3\end{cases}$

Ella trabaja así: calcula la derivada de la función para valores distintos de 3: $f'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<3\\ 2x-5 & \text{si } x>3\end{cases}$

y concluye que como $\lim\limits_{x\to 3^-}f'(x)=1$ **y** $\lim\limits_{x\to 3^+}f'(x)=2\cdot 3-5=1$**, entonces,** $f'(3)=1$**.**

¿Dónde está el error que comete Rocío?

El error de Rocío consiste en que no ha estudiado primero si la función es continua en x = 3. Su método sólo sería válido si la función fuera continua en x = 3.

Como se observa, $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-6$, lo cual indica que la función no es continua en x = 3 y, por tanto, no es derivable en x = 3.

6.42. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función en el punto indicado:

$$f(x)=\begin{cases}7-3x & \text{si } x<2\\ x^2-7x+11 & \text{si } x\ge 2\end{cases} \quad \textbf{en } x=2$$

Se estudia primero la continuidad en x = 2.

Hay que estudiar los límites laterales en dicho punto y el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(7-3x)=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-7x+11)=1$ $\quad f(2)$ = 1

La función es continua en x = 2, ya que $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$.

Y ahora se estudia la derivabilidad en x = 2.

La derivada de la función para x distinto de 2 es: $f'(x)=\begin{cases}-3 & \text{si } x<2\\ 2x-7 & \text{si } x>2\end{cases}$

Para x = 2 vemos que:

$\lim\limits_{x\to 2^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-3)=-3$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-7)=-3$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f'(x)$, la función f es derivable en x = 2.

6.43. (PAU) Sea la función: $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x+a & \text{si } x\le 0\\ x^2+bx+1 & \text{si } x>0\end{cases}$

Halla los valores de *a* y *b* para que sea continua y derivable en todo su dominio.

Como los polinomios son funciones continuas, solo falta estudiar qué ocurre en el valor $x = 0$.

Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales en ese punto deben ser iguales y coincidir con el valor de la función:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x^2-3x+a)=a \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+bx+1)=1 \qquad f(0)=a$

Igualando los límites laterales se obtiene que para que *f* sea continua en $x = 0$ debe ser $a = 1$.

La función es, por tanto: $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x+1 & \text{si } x\le 0\\ x^2+bx+1 & \text{si } x>0\end{cases}$

Como también ha de ser derivable en $x = 0$, las derivadas laterales en dicho punto deben ser iguales: La derivada de la función para *x* distinto de 0 es: $f'(x)=\begin{cases}4x-3 & \text{si } x<0\\ 2x+b & \text{si } x>0\end{cases}$

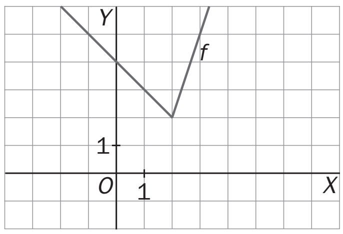
$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(4x-3)=-3 \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+b)=b$

Por tanto, para que *f* sea derivable en $x = 0$ debe ser $b = -3$.

Entonces, $f(x)$ es continua y derivable en **R**, si $a = 1$ y $b = -3$.

6.44. Calcula las derivadas laterales de función $f(x)=|2x-4|+x$ en el punto $x = 2$. ¿Es la función derivable en dicho punto? Esboza su gráfica.

Se trata de una función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases}4-x & \text{si } x<2\\ 3x-4 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$



$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4-2-h-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{6+3h-4-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3$$

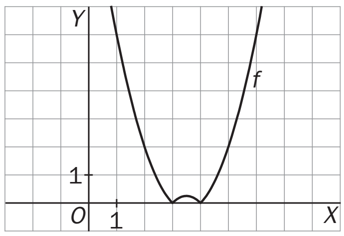
Al no coincidir las derivadas laterales, la función no es derivable en $x = 2$.

6.45. Explica por qué no existe la derivada de $f(x)=|x^2-7x+12|$ en $x = 4$.

Primero se define la función a trozos, estudiando qué valores de *x* anulan el valor absoluto y para qué valores es positiva y para cuáles negativa: $g(x)=x^2-7x+12$, se hace cero si $x = 3$ o si $x = 4$, es positiva si

$x < 3$ o si $x > 4$, y es negativa si $3 < x < 4$.

Así pues, la función es: $f(x)=\begin{cases}x^2-7x+12 & \text{si } x<3\\ -x^2+7x-12 & \text{si } 3\le x\le 4\\ x^2-7x+12 & \text{si } x>4\end{cases}$, que es continua en todo **R**. La derivada para valores de *x* distintos de 3 y de 4 es: $f'(x)=\begin{cases}2x-7 & \text{si } x<3\\ -2x+7 & \text{si } 3<x<4\\ 2x-7 & \text{si } x>4\end{cases}$



Para $x = 4$: $\lim_{x\to 4^-} f'(x)=\lim_{x\to 4^-}(-2x+7)=-1 \qquad \lim_{x\to 4^+} f'(x)=\lim_{x\to 4^+}(2x-7)=1$

Como los límites laterales no coinciden, la función *f* no es derivable en $x = 4$.

También se puede deducir a partir de la gráfica de la función $f(x)=|x^2-7x+12|$, en la que se observa que los puntos de abscisas $x = 3$ y $x = 4$ no admiten tangente, son puntos angulosos.

6.46.(PAU) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}}$$

Como la función es polinómica en el interior de los tramos de definición, basta estudiar qué sucede en x = 1.
Continuidad en x = 1:

Se estudian los límites laterales en dicho punto y el valor de la función:

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0$ $\qquad$ $f(1) = 0$

La función es continua en x = 1, ya que $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Derivabilidad en x = 1:

La derivada de la función para x distinto de 1 es: $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Las derivadas laterales en x = 1: $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x=2$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1$

Como $\lim_{x\to 1^-} f'(x)\ne \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, la función f no es derivable en x = 1.

Por tanto, la función es continua, pero no derivable en x = 1.

6.47.(PAU) Se sabe que la función f: [0, 5] →R dada por $f(x)$ = $\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0, 5) y verifica que $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?

En primer lugar, como $f(0) = f(5)$, 0 = c + 2, es decir, c = –2.

La función es $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ -2+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5 \end{cases}$

Como debe ser continua en x = 2, los límites laterales en dicho punto deben ser iguales y además coincidir con el valor de la función:

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax+bx^2)=2a+4b$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-2+\sqrt{x-1})=-1$ $\qquad$ $f(2) = -1$

Así pues, para que f sea continua en x = 2, debe ser $2a + 4b = -1$.

Para que sea derivable en x = 2, las derivadas laterales en ese punto deben ser iguales.

La derivada de la función para x distinto de 2, 0 y 5 es: $f'(x)=\begin{cases} a+2bx & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2<x<5 \end{cases}$.

$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}(a+2bx)=a+4b$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}$

Así pues, para que f sea derivable en x = 2 debe ser $a+4b=\dfrac{1}{2}$.

Con las ecuaciones obtenidas se plantea un sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} 2a+4b=-1 \\ a+4b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{cases} 2a+4b=-1 \\ -2a-8b=-1 \end{cases} \\ \hline -4b=-2 \Rightarrow b=\dfrac{1}{2} \end{array} \Rightarrow a=\frac{1}{2}-4b=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

Para que la función f cumpla las condiciones del enunciado, $a = -\dfrac{3}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$ y $c = -2$.

6.48.(PAU) Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1 \\ cx & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

calcula *a*, *b* y *c* para que la función sea derivable en *x* = 1, sabiendo que *f*(0) = *f*(4).

La función debe ser continua, y para ello, los límites laterales en $x = 1$ han de ser iguales y coincidir con el valor de la función en el punto:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+ax+b)=1+a+b \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} cx=c \qquad f(1)=c$$

Entonces, $1 + a + b = c$

Para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales tienen que ser iguales.

Las derivadas de la función para x distinto de 1 son: $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<1 \\ c & \text{si } x>1 \end{cases}$

Las derivadas laterales en $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+a)=2+a \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} c=c$

Como han de ser iguales, $a + 2 = c$ y, como $f(0) = f(4)$, debe ser $b = 4c$.

Con las tres ecuaciones se plantea un sistema: $\begin{cases} 1+a+b=c \\ a+2=c \\ b=4c \end{cases} \Rightarrow 1 + c - 2 + 4c = c \Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = -\frac{7}{4} \Rightarrow b = 1$$

Se cumplen las condiciones del enunciado para la función f si $a = -\dfrac{7}{4}$, $b = 1$, $c = \dfrac{1}{4}$.

Aproximación lineal de una función en un punto. Diferencial de una función

6.49. Sabiendo que $\ln 2 \approx 0{,}69315$, obtén la aproximación lineal de la función $f(x)=\log_2 x$ en $x = 2$ y utilízala para obtener los valores aproximados de *f*(*x*) en *x* = 2,01, *x* = 1,9 y *x* = 2,9.Compara estos resultados con los obtenidos con la calculadora. ¿Qué ocurre a medida que nos alejamos del 2?

$$f(x)=\log_2 x=\frac{\ln x}{\ln 2}$$

La aproximación lineal de una función $f(x)$ es: $f(x + h) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$. En este caso, para cada valor pedido, $x = 2$ y dx es 0,01, –0,1 y 0,9, respectivamente.

$f(2) = 1$; $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2} \Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{2\ln 2}$

Entonces:

$f(2{,}01) = 1 + \dfrac{1}{2\ln 2}\cdot 0{,}01 = 1 + \dfrac{0{,}01}{2\cdot 0{,}69315} = 1{,}00721$. Con la calculadora se obtiene $\log_2 2{,}01 = 1{,}007195501$.

$f(1{,}9) = 1 + \dfrac{1}{2\ln 2}\cdot(-0{,}1) = 1 - \dfrac{0{,}1}{2\cdot 0{,}69315} = 0{,}92786$. Con la calculadora se obtiene $\log_2 1{,}9 = 0{,}925999418$.

$f(2{,}9) = 1 + \dfrac{1}{2\ln 2}\cdot 0{,}9 = 1 + \dfrac{0{,}9}{2\cdot 0{,}69315} = 1{,}64921$. Con la calculadora se obtiene $\log_2 2{,}9 = 1{,}5360529$.

A medida que nos alejamos del 2, la aproximación lineal va siendo peor.

6.50. Realiza una estimación lineal de la variación de la función $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{x+1}$ al incrementar la x de 2 a 2,1.

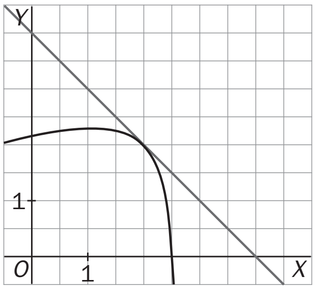
La aproximación lineal de una función $f(x)$ es: $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,dx$. En este caso, $x = 2$ y dx es 0,1.

$f(2) = 1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(2) = \dfrac{8}{9}$

Entonces:

$f(2{,}1) = \dfrac{7}{3} + \dfrac{8}{9} \cdot 0{,}1 = \dfrac{7}{3} + \dfrac{0{,}8}{9} = \dfrac{21{,}8}{9} = 2{,}422222$

6.51. En el dibujo se muestra un trozo de gráfica de cierta función f y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $A(2, 2)$.



Queremos calcular el valor de $f(2{,}05)$ y de $f(1{,}87)$, pero desconocemos la expresión analítica de la función f. Ayudándote de la aproximación lineal y encontrando previamente la ecuación de la recta tangente, estima los valores de $f(2{,}05)$ y $f(1{,}89)$.

La recta tangente en el punto $A(2, 2)$ es $x + y = 4$, es decir, $y = -x + 4$, cuya pendiente es -1, y, por tanto, sabemos que $f'(2) = -1$.

$L(2{,}05) = f(2) + f'(2) \cdot (2{,}05 - 2)$, es decir: $L(2{,}05) = 2 + (-1) \cdot (2{,}05 - 2) = 1{,}95$

$L(1{,}89) = f(2) + f'(2) \cdot (1{,}89 - 2)$, es decir: $L(1{,}89) = 2 + (-1) \cdot (1{,}89 - 2) = 2{,}11$

6.52. Obtén con la calculadora el valor de $\sqrt[5]{32{,}3}$ y obtenlo también utilizando diferenciales.

Con la calculadora: $\sqrt[5]{32{,}3} = 2{,}00373$

Se considera la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Su aproximación lineal es: $\sqrt[5]{32{,}3} \approx f(32) + f'(32) \cdot 0{,}3$.

$f(32) = 2$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \Rightarrow f'(32) = \dfrac{1}{80}$

Entonces:

$\sqrt[5]{32{,}3} = 2 + \dfrac{1}{80} \cdot 0{,}3 = 2{,}00375$

6.53. Obtén con la calculadora el valor de sen(0,2) y obtenlo también mediante la aproximación lineal de $y = \text{sen}\, x$ en $a = 0$.

Con la calculadora: sen(0,2) = 0,1987

La aproximación lineal es: $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$, siendo $x = 0$ y dx es 0,2.

$f(0) = 0$ $\qquad f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

Entonces:

$f(0{,}2) = 0 + 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$

PROBLEMAS

6.54. El coste de producción de x unidades viene dado por la función $C(x) = 0{,}06x^2 - 4{,}2x + 75$. En Economía, se llama coste marginal al coste ocasionado por la producción de una unidad suplementaria y se calcula hallando la derivada en dicho punto. Halla el coste marginal al producir la unidad número 81 de las dos formas indicadas y después compara el resultado. Es decir, calcula:

a) $C(80+1) - C(80)$.

b) $C'(80)$.

Compara los resultados obtenidos.

a) $C(80+1) - C(80) = C(81) - C(80) = 128{,}46 - 123 = 5{,}46$ unidades monetarias

b) La función derivada es $C'(x) = 0{,}12x - 4{,}2$; por tanto, $C'(80) = 0{,}12 \cdot 80 - 4{,}2 = 5{,}4$ unidades monetarias.

Los resultados son bastante similares, difieren en cuatro centésimas.

6.55. Una partícula está recorriendo la curva $y = x^2$. En cierto momento la abandona y comienza a desplazarse por la tangente trazada por el punto en el que abandonó la curva.

¿En qué momento debe dejar la curva para que su trayectoria pase por el punto $A\left(4, \frac{39}{4}\right)$?

Sea el punto $B(a, f(a)) = B(a, a^2)$ donde la partícula abandona la curva y se dirige rectilíneamente hacia el punto $A\left(4, \frac{39}{4}\right)$. La pendiente de la recta AB se puede hallar de dos formas distintas:

Pendiente de la recta que pasa por dos puntos: $m = \dfrac{\frac{39}{4} - a^2}{4 - a}$.

Pendiente de la recta tangente en el punto $B(a, a^2)$: $m = f'(a) = 2a$.

Igualando estas expresiones se obtiene el valor de a:

$$\frac{\frac{39}{4} - a^2}{4 - a} = 2a \Rightarrow \frac{39}{4} - a^2 = 8a - 2a^2 \Rightarrow 39 - 4a^2 = 32a - 8a^2 \Rightarrow 4a^2 - 32a + 39 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 624}}{8} = \frac{32 \pm 20}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{2} \\ a = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

La partícula deberá abandonar la curva en el momento en que pase por los puntos $B_1\left(\frac{13}{2}, \frac{169}{4}\right)$ o $B_2\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, dependiendo del rumbo que lleve la partícula.

6.56. La anchura de un rectángulo está creciendo a razón de 2 cm/seg y su longitud está creciendo a 3 cm/seg. ¿Cuánto crece por segundo el área en el instante en el que la anchura es 7 cm y la longitud 5 cm?

Si $B(t)$ es la función que define la longitud de la base del rectángulo; $H(t)$, la que define la altura, y $A(t)$, la que define el área, $A(t) = B(t) \cdot H(t)$, y haciendo la derivada del producto: $A'(t) = B'(t) \cdot H(t) + H'(t) \cdot B(t)$.

Como $B'(t) = 2$ y $H'(t) = 3$ para todo t, cuando $B(t) = 7$ y $H(t) = 5$ se obtiene $A'(t) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 31$ cm^2/seg.

6.57. El coste total de producción de *q* unidades de cierto producto viene dado, en euros, por la expresión $C(q) = 2q^2 + 5q + 10$. Una empresa produce en la actualidad un total de 50 unidades y estudia la posibilidad de aumentar la producción a 50,5 unidades. Estima, utilizando la aproximación lineal, cuál será la diferencia de costes si se producen 50,5 unidades en lugar de 50.

La aproximación lineal de la función es $C(q + 0{,}5) = C(q) + 0{,}5 \cdot C'(q)$.

$C'(q) = 4q + 5$

Para $q = 50$: $C(50) = 5260$ $\qquad$ $C'(q) = 205$

$C(50, 5) = 5260 + 0{,}5 \cdot 205 = 5260 + 102{,}5$

Luego la diferencia de costes es de 102,50 euros.

6.58. El propietario de una gasolinera observa que la demanda diaria de gasolina de 95 octanos, en miles de litros, viene dada por la expresión $f(x) = \dfrac{10(x+1)}{x(x+2)}$, donde *x* representa el precio, en euros, del litro de gasolina ese día.

a) Calcula la tasa de variación media de la demanda cuando el precio pasa de 1,12 a 1,14 euros.

b) Halla la tasa de variación instantánea de la demanda cuando el precio de la gasolina es de 1,14 euros.

a) $TVM\ f[1{,}12;1{,}14] = \dfrac{f(1{,}14) - f(1{,}12)}{1{,}14 - 1{,}12} \approx \dfrac{5{,}978 - 6{,}067}{0{,}02} = -4{,}45 = -4450$ litros

b) La tasa de variación instantánea coincide con la derivada: $TVI\,f(1{,}14) = f'(1{,}14)$.

La derivada de la función: $f'(x) = \dfrac{10\left(x^2+2x\right) - 10\left(x+1\right)\left(2x+2\right)}{x^2\left(x+2\right)^2} = \dfrac{-10(x^2+2x+2)}{x^2(x+2)^2}$

Entonces: $TVI\,f(1{,}14) = f'(1{,}14) \approx -4{,}354 = -4354$ litros

PROFUNDIZACIÓN

6.59. El vértice de la parábola $y = x^2 + ax + b$ es el punto (2, 2). ¿Cuánto vale la función en $x = -1$?

Como $f(2) = 2$, $2^2 + 2a + b = 2 \Rightarrow 2a + b = -2$.

En el vértice, la derivada es 0. Por tanto, $f'(2) = 0$. Como $f'(x) = 2x + a$, entonces $f'(2) = 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $2 \cdot (-4) + b = -2 \Rightarrow b = 6$

Por tanto, la función es $f(x) = x^2 - 4x + 6$, y $f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6 = 11$.

6.60. ¿Hay alguna pareja de números *a* y *b* para los que la función sea derivable en R ?

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\cos x-1 & \text{si } x<0\\ x^2+a & \text{si } 0\le x\le 2\\ \dfrac{b}{x-1} & \text{si } x>2\end{cases}}$$

La función es continua en el interior de los dos primeros tramos de definición. En el tercer tramo también es continua porque el valor de *x* que anula el denominador no pertenece a su domino de definición del mismo. Así pues, solo hay que estudiar qué ocurre en los valores de solapamiento $x = 0$ y $x = 2$.

Para que sea continua en $x = 0$, los límites laterales deben ser iguales y coincidir con el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x-1)=0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+a)=a \qquad f(0) = a$

Igualando los resultados obtenidos, $a = 0$.

La función es, por tanto, $f(x)=\begin{cases}\cos x-1 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ \dfrac{b}{x-1} & \text{si } x>2\end{cases}$

Imponiendo la condición de continuidad en $x = 2$:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=4 \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{b}{x-1}\right)=b \qquad f(2) = 4$

Igualando los resultados se obtiene que $b = 4$.

Por tanto, para los valores de *a* y *b* obtenidos, la función $f(x)=\begin{cases}\cos x-1 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ \dfrac{4}{x-1} & \text{si } x>2\end{cases}$ es continua en todo **R**.

Ahora se estudia si es derivable o no.

La derivada de la función para *x* distinto de 0 y de 2 es: $f'(x)=\begin{cases}-\operatorname{sen} x & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } 0<x<2\\ \dfrac{-4}{(x-1)^2} & \text{si } x>2\end{cases}$

Para $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\operatorname{sen} x)=0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x=0$. Así pues, la función es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

Para $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2x=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-4}{(x-1)^2}=-4$. Así pues, la función no es derivable en $x = 2$.

Por tanto, no existe ninguna pareja de números *a* y *b* para los que la función $f(x)$ sea derivable en todo **R**.

6.61. Considera la función $f(x) = x^3 + px$ donde *p* es un cierto número real. Escribe (en función de *p*) la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ y determina posteriormente el valor de *p* para que dicha tangente pase por el punto $A(2, 0)$.

La ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ es: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$f(1) = 1 + p$. La derivada es $f'(x) = 3x^2 + p$, por lo que $f'(1) = 3 + p$.

Entonces, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ es $y - (1 + p) = (3 + p)(x - 1)$, es decir, $y = (3 + p)x - 2$.

Para que dicha tangente pase por $A(2, 0)$ debe cumplirse que: $0 = (3 + p) \cdot 2 - 2 \Rightarrow 6 + 2p - 2 = 0 \Rightarrow p = -2$.

6.62. Halla los valores de la constante *k* para que las rectas tangentes a las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = (x - k)x$ en el punto de abscisa 1 sean paralelas.

Son paralelas si $f'(1) = g'(1)$.

La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3$.

La de $g(x)$ es $g'(x) = 2x - k \Rightarrow g'(1) = 2 - k$.

Como han de ser iguales, $3 = 2 - k \Rightarrow k = -1$.

Solo hay un valor de *k* que cumple la condición.

6.63. ¿Existen números reales *a* y *b* para los que la tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$ en el punto de abscisa 0 sea la recta $y = 4x + 3$?

El punto de tangencia es $A(0, 4 \cdot 0 + 3) = A(0, 3)$. Así pues, $f(0) = 3$ y, por tanto, $3 = f(0) = \dfrac{b}{1} = b \Rightarrow b = 3$

La función sería: $f(x) = \dfrac{3x^3 + ax + 3}{x^2 + 1}$

Por otro lado, $f'(0) = 4$, ya que es la pendiente de la recta tangente $y = 4x + 3$.

La derivada de la función es: $f'(x) = \dfrac{(9x^2 + a)(x^2 + 1) - (3x^3 + ax + 3)2x}{(x^2 + 1)^2}$, entonces: $4 = f'(0) = \dfrac{a}{1} = a \Rightarrow a = 4$

Los valores de *a* y *b* que cumplen la condición son 4 y 3, respectivamente.

6.64. Calcula la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ y, posteriormente, y sin utilizar la derivada del cociente, obtén las derivadas de $g(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x} - 1}$ y $t(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$.

La derivada de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ es: $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

Llamando $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = (f \circ h)(x)$, cuya derivada se calcula aplicando la regla de la cadena:

$$g'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} - 1}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x - 2\sqrt{x} - 1}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

De manera análoga, llamando $u(x) = x^2$, $t(x) = (f \circ u)(x)$:

$$t'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{\left(x^2\right)^2 - 2x^2 - 1}{\left(x^2 - 1\right)^2} \cdot 2x = \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{\left(x^2 - 1\right)^2} \cdot 2x$$

6.65. Calcula $f'(0)$ sabiendo que $f(x) = [g(x)]^{\cos x}$ y que $g(0) = g'(0) = e$.

Ayuda: para calcular $f'(x)$ escribe $f(x) = e^{\ln[g(x)]^{\cos x}} = e^{\cos x \ln[g(x)]}$.

Teniendo en cuenta la última expresión de $f(x)$, $f(x) = e^{\cos x \ln[g(x)]}$, su derivada es:

$$f'(x) = \left(-\text{sen}\, x \cdot \ln g(x) + \cos x \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\right) e^{\cos x \ln[g(x)]}$$

Sustituyendo *x* por 0, se obtiene:

$$f'(0) = \left(-\text{sen}\, 0 \cdot \ln g(0) + \cos 0 \cdot \frac{g'(0)}{g(0)}\right) e^{\cos 0 \cdot \ln g(0)} = 1 \cdot \frac{e}{e} \cdot e^1 = e$$

6.66. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ¿Es continua en $x = 0$?

b) ¿Es derivable en $x = 0$?

c) ¿Cuál es el mínimo valor que toma esta función? ¿Para qué valor de x lo toma?

a) Es continua en $x = 0$ si los límites laterales en ese punto son iguales y coinciden con el valor de la función:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^{-x} - 1) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + x) = 0 \qquad f(0) = 0$

La función es continua en $x = 0$, ya que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

b) Es derivable en $x = 0$ si las derivadas laterales en ese punto existen y coinciden.

La derivada de la función para x distinto de 0 es: $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Las derivadas laterales son en $x = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-e^{-x}) = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x + 1) = 1$

Como $\lim_{x\to 0^-} f'(x) \ne \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, la función f no es derivable en $x = 0$.

c) La función es siempre mayor o igual que 0 y solo vale 0 si $x = 0$, luego el mínimo de la función es el punto $O(0, 0)$.

6.67. Encuentra las tangentes comunes a las parábolas $y = x^2$, $y = (x - 1)(5 - x)$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = a$ es:

$y - a^2 = 2a(x - a) \Rightarrow y = 2ax - a^2$

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 6x - 5$ en el punto de abscisa $x = b$ es:

$y - (-b^2 + 6b - 5) = (-2b + 6)(x - b) \Rightarrow y = (-2b + 6)x + b^2 - 5$

Para que sean la misma recta deben tener la misma pendiente y la misma ordenada en el origen.

Por tanto: $\begin{cases} 2a = -2b + 6 \\ -a^2 = b^2 - 5 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $a = -b + 3 \Rightarrow -(-b + 3)^2 = b^2 - 5 \Rightarrow -b^2 + 6b - 9 = b^2 - 5 \Rightarrow 2b^2 - 6b + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 - 3b + 2 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2$ y $b = 2 \Rightarrow a = 1$

Las tangentes comunes son $y = 2x - 1$ e $y = 4x - 4$

6.68. Determina todas las funciones f de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \ne 0$, y que verifica $f'(-1) = f'(1) = 0$.
¿Alguna de las funciones determinadas anteriormente verifican $f(0) = f(1)$?

Se deriva $f(x)$ y se obtiene $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$f'(-1) = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 3a - 2b + c = 0$

$f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 3a + 2b + c = 0$

Como $f'(-1)$ debe coincidir con $f(1) \Rightarrow 3a - 2b + c = 3a + 2b + c \Rightarrow b = 0$.

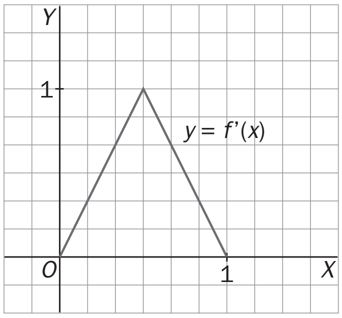
Sustituyendo en las dos ecuaciones anteriores se obtiene $c = -3a$.

Las funciones que verifican estas condiciones son de la forma $f(x) = ax^3 - 3ax + d$.

Si además $f(0) = f(1)$, debe ser $d = a - 3a + d \Rightarrow a = 0$

Por tanto, no existe ninguna función con esa expresión que cumpla las condiciones deseadas.

6.69. En la siguiente ilustración se representa la gráfica de la función derivada $f\,'$ de una cierta función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.



a) Halla una expresión algebraica de f sabiendo que $f(0)=0$.

b) ¿Existe $f''\left(\frac{1}{2}\right)$?

a) La derivada es $f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2-2x & \text{si } \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$, luego la función es $f(x)=\begin{cases}x^2+a & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2x-x^2+b & \text{si } \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$.

Como $f(0)=0$, $a=0$, y como f es derivable, debe ser continua.

Para que sea continua en $x=\frac{1}{2}$, los límites laterales en ese punto deben ser iguales y coincidir con $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f'(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}(x^2)=\frac{1}{4}\qquad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f'(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}(2x-x^2+b)=1-\frac{1}{4}+b\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

Igualando los resultados: $\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}+b\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$

Entonces: $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2x-x^2-\frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$

b) No, pues la función derivada no es derivable en $x=\frac{1}{2}$.

6.70. La tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P(2, f(2))$ pasa también por el punto $Q(-3, 0)$. Si $f\,'(2)=\frac{1}{2}$, calcula $f(2)$.

La pendiente m de la recta tangente que pasa por $P(2,f(2))$ y $Q(-3, 0)$ debe ser igual a $f'(2)=\frac{1}{2}$:

$$m=\frac{f(2)-0}{2-(-3)}=\frac{f(2)}{5}=\frac{1}{2}\Rightarrow f(2)=\frac{5}{2}$$

6.71. Obtén con la calculadora sen(0,02) y compáralo con el resultado obtenido por la aproximación lineal de $y=\operatorname{sen}x$ en $a=0$.

Con la calculadora en radianes: sen(0,02) = 0,0199986

Se considera la función $f(x)=\operatorname{sen}x$, y se realiza una aproximación lineal de la misma para $a=0$ y $x=0{,}02$:

$L(0{,}02)=f(0)+f\,'(0)\cdot(0{,}02-0)\Rightarrow L(0{,}02)=\operatorname{sen}0+\cos 0\cdot(0{,}02-0)=0{,}02$

La aproximación es muy buena.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

6.1. Sean *f* y *g* funciones derivables definidas en R.

A) Si $f(2) > f(3)$, entonces $f''(2) \geq f''(3)$.

B) Si $f'(x) \geq g'(x)$ para todo *x* real, entonces $f(x) - g(x) \geq 0$.

C) Si $g(x) = f(x^3 + 1)$, entonces $g'(x) = f'(x^3 + 1)$.

D) Si $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$, entonces $\lim_{x \to 3} f(x) = f(x) + 2$.

E) Si $f'(x) \geq 2$ para todo *x*, no hay ningún punto en la gráfica de $(f \circ f)(x)$ con tangente paralela a la recta $y = 3x + 1$.

La respuesta correcta es la E, puesto que $(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) \geq 4$: para que la recta tangente a la curva sea paralela a la recta $y = 3x + 1$, su derivada debe ser igual a 3, pero la derivada es mayor o igual que 4 y, por tanto, es imposible que eso ocurra.

6.2. Considera la función $f(x) = x + \text{sen } x + 1$.

A) Existen números *x* tales que $f'(x) > 2$.

B) Hay algún punto de la gráfica en el que la tangente es paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x$.

C) $f'(x) \geq f(x)$ para todo *x* real.

D) La tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 0 es la recta $y = 2x$.

E) Nada de lo anterior es correcto.

La respuesta correcta es la B.

6.3. Sea $f(x)$ la función dada por $f(x) = (x - 1)(3 - x)$ y sea $g(x) = \ln f(x)$.

A) *g* es positiva en su dominio de definición.

B) La recta tangente a $g(x)$ en el punto de abscisa 2 es paralela a $y = x$.

C) $\lim_{x \to 2} g(x) = 1$.

D) $D(g) = (1, 3)$.

E) La gráfica de *g* nunca corta al eje horizontal.

La respuesta correcta es la D, ya que $f(x)$ es positiva en el intervalo (1, 3).

Señala en cada caso las respuestas correctas:

6.4. Sea *f* la función definida en $(-\infty, 1]$ mediante la fórmula $f(x) = 2x\sqrt{1 - x}$, y *T*, la tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 0.

A) Para todo $x < 1$ es $f'(x) = \frac{2 - 3x}{\sqrt{1 - x}}$.

B) Para todo *x* de $(-\infty, 1)$ se verifica $f'(x) > 0$.

C) La ecuación de *T* es $y = 2x$.

D) La gráfica de *f* presenta un único punto con tangente horizontal.

E) Si $\frac{2}{3} < a < b < 1$, entonces $f(b) < f(a)$.

Son correctas las afirmaciones A, C, D y E

6.5. Sea la función $f(x) = x \cdot |x|$ definida en R.

A) Como $g(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, $f(x)$ tampoco lo es.

B) Para todo x real, $f'(x) = |x| + x$.

C) $f'(x) = 0$.

D) $f'(x) = 2x$ si $x \neq 0$.

E) Si $x < 0$, $f'(x) + g'(x) = 0$ siendo $g(x) = x^2$.

Es correcta la afirmación E.

6.6. Sea f una función derivable en $(0, +\infty)$ verificando $g(1) = 0$ y $g'(x) = \frac{1}{x}$.

A) La pendiente de la tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa 1 es 1.

B) La función definida por $f(x) = x \cdot g(x)$ admite por derivada $f'(x) = 1$.

C) La función $h(x) = g(2x + 1)$ verifica $h'(x) = \frac{1}{2x+1}$.

D) Si $t(x) = x^2$, la derivada de $g \circ t$ en cada punto x verifica $(g \circ t)'(x) = \frac{2}{x}$.

E) Cuanto mayor es x, más próximas a la horizontal son las tangentes a $g(x)$.

Son correctas las afirmaciones A, D y E.

6.7. Sea $f(x) = x \cdot 3^{-x}$.

A) $f'(x) = (1 - x\ln 3)e^{-x\ln 3}$

B) $f'(x) = (1 - x)3^{-x}$

C) $f'(x) = (1 - x\ln 3)3^{-x}$

D) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{3^h}$

E) $\lim_{x \to 0} f'(x) = 1$

Son correctas las afirmaciones C y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

6.8. Sea f una función derivable y $g(x) = x + f^2(x)$.

a) La tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa 0 es paralela a la recta $y = x$.

b) La gráfica de $f(x)$ pasa por el origen.

A) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a

C) a $\Leftrightarrow$ b

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior

La respuesta correcta es la B, puesto que si $f(0) = 0$, $g'(0) = 1 + 2f(0) \cdot f'(0) = 1$, pero no es cierto lo contrario, ya que podría ser $f'(0) = 0$.

Señala el dato innecesario para contestar:

6.9. Nos planteamos si la tangente a la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en el punto de abscisa 3 corta a la recta $y = 2x + 1$, y nos dan estos datos.

a) Valor de a

b) Valor de b

c) Valor de c

d) Valor de d

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es la E.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

6.10. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = ax^2\, g(x)$, en $x = 0$ con a real y g una función definida en R.

a) $a = 3$

b) g es derivable en 0.

A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos.

E) Faltan más datos.

La respuesta correcta es la C.