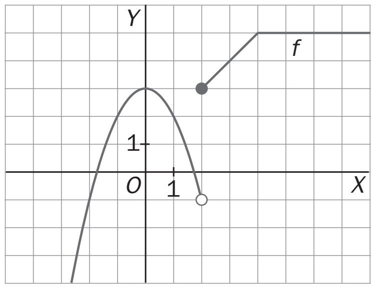
5 Funciones. Límites y continuidad

ACTIVIDADES INICIALES

5.I. Representa la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & \text{si} \quad x<2 \\ x+1 & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ 5 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$



5.II. Factoriza estos polinomios:

a) $P(x) = x^2 - 4x - 5$ b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

a) $P(x) = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$

b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x = x(x + 1)(x + 3)$

c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1. Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa para almacenar un líquido colorante con un volumen de 500 cm^3. Las cajas tienen la base cuadrada. Llama *x* a la longitud del lado de la base y encuentra una función que nos dé los metros cuadrados de latón necesarios en función de *x*.

Si h es la altura de la caja, su superficie = $4xh + x^2$; como el volumen = $x^2 h$, la altura de la caja es $h = \dfrac{500}{x^2}$, y la superficie, $S(x) = \dfrac{2000}{x} + x^2$.

5.2. Encuentra la expresión matemática que nos da la suma de dos números en función de uno de ellos, sabiendo que el producto de ambos es 192.

Si $xy = 192$; $y = \dfrac{192}{x} \Rightarrow x + y = x + \dfrac{192}{x}$ $S(x) = x + \dfrac{192}{x}$

5.3. La función $f(x) = -x^2 + 120x - 3200$ representa el beneficio (en cientos de euros) que obtiene una empresa en la fabricación de *x* unidades de un producto.

a) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para obtener el máximo beneficio posible? ¿Cuál es este beneficio máximo?

b) Halla la función que expresa el beneficio unitario

c) ¿Cuál es el beneficio unitario al fabricar 60 unidades?

a) Como es una parábola cóncava hacia abajo, el máximo lo alcanza en el vértice: $x_V = \dfrac{120}{2} = 60$. Luego el máximo beneficio se obtiene fabricando 60 unidades de producto.
Como $f(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 3200 = 400$, el beneficio es de 40 000 euros.

b) $B(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{-x^2 + 120x - 3200}{x}$

c) $B(60) = \dfrac{-60^2 + 120 \cdot 60 - 3200}{60} = \dfrac{400}{60} = 6,\widehat{6}$. El beneficio es de 666,67 euros por unidad.

5.4. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$, calcula el dominio y la expresión de las funciones:

a) $f - g$ **b) $f \cdot g$** **c) $\dfrac{1}{f}$** **d) $\dfrac{f}{g}$**

Comenzamos calculando el dominio de cada una de ellas:

$D(f) = [-2, +\infty)$, y $D(g) = \mathbf{R} - \{-3, 3\}$

a) $f - g$ $\quad D(f-g) = [-2, +\infty) - \{3\}$; $\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+2} - \dfrac{x}{x^2-9}$

b) $f \cdot g$ $\quad D(f \cdot g) = [-2, +\infty) - \{3\}$; $\quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x\sqrt{x+2}}{x^2-9}$

c) $\dfrac{1}{f}$ $\quad$ Como $f(-2) = 0$, $D(\dfrac{1}{f}) = (-2, +\infty)$; $\quad \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

d) $\dfrac{f}{g}$ $\quad$ Como $g(0) = 0$, $D(\dfrac{f}{g}) = [-2, +\infty) - \{0, 3\}$; $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(x^2-9)\sqrt{x+2}}{x}$

Observación: A pesar de que la expresión de $\dfrac{f}{g}$ sí está definida si $x = 3$, al provenir dicha función de un cociente de funciones en las que una de ellas no está definida en $x = 3$, este punto no está en el dominio del cociente.

5.5. Escribe las siguientes funciones como composición de funciones elementales.

a) $M(x) = \ln(3x-5)$ **b) $N(x) = \sqrt{\mathrm{sen}(e^x)}$**

a) $f(x) = 3x - 5$; $\quad g(x) = \ln(x)$; $\quad M(x) = (g \circ f)(x)$

b) $f(x) = e^x$; $\quad g(x) = \mathrm{sen}\,x$; $\quad h(x) = \sqrt{x}$; $\quad N(x) = (h \circ g \circ f)(x)$

5.6. Ayudándote de la calculadora, obtén los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$** **e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$** **g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$**

b) $\lim\limits_{x\to -3} e^x + 5$ **d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$** **f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$** **h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x}{x+2}$**

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to -3} e^x + 5 = e^{-3} + 5 \approx 5{,}049$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{1}{6}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$. No existe. Si nos acercamos al cero por la izquierda, obtenemos que el límite es –1, pero si nos acercamos por la derecha, el límite nos da 1, es decir, los límites laterales no coinciden.

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$. No existe. Se hace muy grande en valor absoluto (negativo si nos acercamos por la izquierda al 2 y positivo si nos acercamos por la derecha).

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x-2} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x}{x+2}$. No existe. Se hace muy grande en valor absoluto (positivo si nos acercamos por la izquierda al 2 y negativo si nos acercamos por la derecha).

5.7. **Escribe una posible expresión para una función *f*, definida a trozos, que cumpla:**

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$ y $f(1) = -2$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$ y $f(2) = 5$

a) Respuesta abierta, una posible expresión para la función *f* sería: $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) Respuesta abierta, una posible expresión para la función *f* sería: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

5.8. **Calcula, si existen,** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$**, siendo *f* la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -1 \\ x^2+1 & -1 \leq x \leq 4 \\ 3-5x & x > 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} (x+3) = 2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ Luego } \lim_{x\to -1} f(x) = 2 .$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} (x^2+1) = 17 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} (3-5x) = -17 \end{cases} \Rightarrow \text{ Como los límites a izquierda y a derecha no coinciden, no existe el límite.}$$

5.9. **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$; $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$

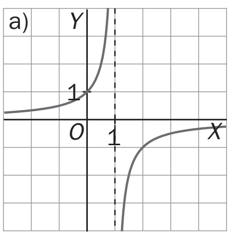
c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x}$

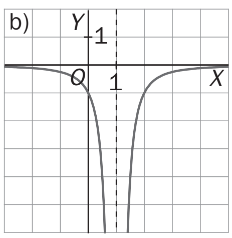
a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} \Rightarrow$ No existe.

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+2}{(x-3)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+2}{(x-3)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{(x-3)^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x} \Rightarrow$ No existe.

5.10. **Calcula** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **en cada caso.**





a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$ No existe.

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

5.11. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5}{x+2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2-4}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-1)(2+3x)}{2x^2-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2+x-2}{2x^2-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{5}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}} = \dfrac{6+0+0}{2+0} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{3x^2}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \dfrac{0-0}{1-0} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}) = \ln(0) = -\infty$

5.12. Calcula los valores de *a* para que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(ax-x)(2+ax)}{3x^2+1} = 2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(ax-x)(2+ax)}{3x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2(a^2-a)+x(2a-2)}{3x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(a^2-a)+\frac{(2a-2)}{x}}{3+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{(a^2-a)}{3} = 2$

$a^2 - a = 6 \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0$, $a = 3$ o $a = -2$

5.13. La población de bacterias de cierto cultivo sigue esta ley: $P(t) = \dfrac{(3t^2+2)(5t+1)}{(2t+1)^3}$ miles de bacterias, donde *t* indica los días transcurridos desde su inicio.

a) ¿Qué población había al principio del estudio?

b) ¿Qué población habrá al cabo de una semana?

c) A medida que transcurre el tiempo, ¿hacia qué valor tiende a estabilizarse la población?

a) $P(0) = \dfrac{(3\cdot 0+2)(5\cdot 0+1)}{(2\cdot 0+1)^3} = \dfrac{2}{1} = 2$ miles de bacterias

Había 2000 bacterias.

b) $P(7) = \dfrac{(3\cdot 7^2+2)(5\cdot 7+1)}{(2\cdot 7+1)^3} = \dfrac{149\cdot 36}{15^3} \approx 1{,}58933$ miles de bacterias

Habrá 1589 bacterias, aproximadamente.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3t^2+2)(5t+1)}{(2t+1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15t^3+3t^2+10t+2}{8t^3+12t^2+6t+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{15t^3}{t^3}+\frac{3t^2}{t^3}+\frac{10t}{t^3}+\frac{2}{t^3}}{\frac{8t^3}{t^3}+\frac{12t^2}{t^3}+\frac{6t}{t^3}+\frac{1}{t^3}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15+\frac{3}{t}+\frac{10}{t^2}+\frac{2}{t^3}}{8+\frac{12}{t}+\frac{6}{t^2}+\frac{1}{t^3}} = \dfrac{15}{8} = 1{,}875$ miles de bacterias

El número de bacterias se aproxima cada vez más a 1875.

5.14. Calcula $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x)=\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

c) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}=\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-5)}{(x+2)}=-\dfrac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{0}{4}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$

5.15. Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3}{x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3}{x}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(5-x)(3+x)$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-x)$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}e^{-x}$

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3}{x+5}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}}=\dfrac{0}{1+0}=0$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-x\right)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3}{x}-x\right)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(5-x)(3+x)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-x)=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{\infty}=0$

5.16. Calcula estos límites. Si dan lugar a indeterminaciones, indica de qué tipo son y resuélvelas:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7-\dfrac{3}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+x-5\right)$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+x-5\right)$

i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7-\dfrac{3}{x}\right)=7-0=7$

b) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=\dfrac{9+3+1}{-5}=-\dfrac{13}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+x-5\right)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$. Indeterminación tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}=3$$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. Indeterminación tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{2}$$

f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}$. Indeterminación tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x^2)(2+\sqrt{x^2+3})}{(2-\sqrt{x^2+3})(2+\sqrt{x^2+3})}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x^2)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2}=\lim_{x\to1}(2+\sqrt{x^2+3})=4$$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}$. Indeterminación tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-4)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-4)}{(x-1)^2}=-\infty$$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+x-5\right)=+\infty$

i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}\right)$. Indeterminación $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=+\infty\end{cases}\Rightarrow\ \text{Luego no existe el límite.}$$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$ Indeterminación tipo $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=0$$

5.17. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, especificando en su caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\left|\dfrac{x}{x-3}\right|$

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Como las funciones que definen cada trozo son continuas, pues son trozos de rectas y parábolas, basta ver qué ocurre en $x = 0$ y en $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ y la función es continua en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, pues, aunque existen los límites laterales, estos no coinciden. Así pues, en $x = 1$ hay una discontinuidad de salto finito.

b) $f(x)=\left|\dfrac{x}{x-3}\right|$. Comencemos definiendo la función como una función a trozos:

$\left|\dfrac{x}{x-3}\right|=\dfrac{x}{x-3}$ si $\dfrac{x}{x-3}\ge 0$. Resolviendo la inecuación tenemos que $x\in(-\infty,0]\cup(3,+\infty)$.

$\left|\dfrac{x}{x-3}\right|=-\dfrac{x}{x-3}$ si $\dfrac{x}{x-3}<0$, $x\in(0,3)$ La función no está definida en $x = 3$, luego allí no será continua.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x-3}=0=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{x}{x-3}=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ y la función es continua en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-}-\dfrac{x}{x-3}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x}{x-3}=+\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad esencial en $x = 3$. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

5.18. Determina para qué valores de *a* y *b* es continua la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-b & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ x^2+b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Si $x\ne 0$ y $x\ne 2$, la función es continua por ser trozos de parábolas y rectas. Calculemos los límites laterales en $x = 0$ y en $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-b)=-b=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b \end{cases}$ Si queremos que en $x = 0$ sea continua, entonces $-b = b \Rightarrow b = 0$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+b)=4+b \end{cases}$ Si queremos que sea continua en $x = 2$ debe ser $2a + b = 4 + b$, y como $b = 0$, debe ser $a = 2$.

La función es: $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

5.19. Determina el valor de $f(1)$ de forma que $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$ si $x \neq 1$ sea continua.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) = 5$$

Luego $f(1) = 5$.

5.20. Demuestra que la ecuación $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ tiene alguna solución real.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función continua $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ en el intervalo [–1, 0], por ejemplo, como $f(-1) = -2$ y $f(0) = 1$, se deduce que existe c en (–1, 0) con $f(c) = 0$, luego $x = c$ es una solución de la ecuación.

5.21, Demuestra que la ecuación $x^3 + 5x + 1 = 0$ tiene alguna solución real y da una aproximación correcta hasta las décimas.

De nuevo se aplica el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x^3 + 5x + 1$ en intervalos cada vez más pequeños hasta obtener la aproximación deseada:

[–1, 0] $f(-1) = -5$ y $f(0) = 1$

[–0,2, –0,1] $f(-0{,}2) = -0{,}008$ y $f(-0{,}1) = 0{,}499$

La solución es $x = -\,0,\,1\ldots$

5.22. La función $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ cumple que $f(1) = -3$ y $f(3) = 1$, y no corta al eje X en ningún punto.

¿Contradice este ejemplo el teorema de Bolzano?

No lo contradice, pues la función no cumple todas las hipótesis del teorema de Bolzano. La función no es continua en el intervalo [1, 3], tiene una discontinuidad esencial en $x = 2$.

5.23. Encuentra el máximo de la función $P(x) = x(5 - x)$.

Como se vio en el texto, la función tiene un máximo. Al ser una parábola, sabemos que dicho máximo lo alcanzará en el vértice $V\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$. Comprobamos que el máximo se alcanza en el intervalo [0, 5].

5.24. Se define poder adquisitivo, PA, como la cantidad de bienes o servicios (de precio unitario PU) que podemos adquirir con una determinada cantidad de dinero T, es decir, $PA = \dfrac{T}{PU}$. Por ejemplo, si disponemos de 180 € para la compra de libros que cuestan 15 € cada uno, tenemos un poder adquisitivo de 12 libros.

Calcula el límite del poder adquisitivo cuando T y PU dependen del tiempo t y este tiende a más infinito, en los casos siguientes:

a) $T(t) = 5t + 1$ y $PU(t) = t^2 + 1$

b) $T(t) = 8t^2 + t$ y $PU(t) = 2t^2 - 3$

c) $T(t) = 3t + 12$ y $PU(t) = 250$

a) $T(t) = 5t + 1$ y $PU(t) = t^2 + 1$

$$\lim_{t\to+\infty} PA = \lim_{t\to+\infty} \frac{T(t)}{PU(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{5t + 1}{t^2 + 1} = 0$$

b) $T(t) = 8t^2 + t$ y $PU(t) = 2t^2 - 3$

$$\lim_{t\to+\infty} PA = \lim_{t\to+\infty} \frac{T(t)}{PU(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{8t^2 + t}{2t^2 - 3} = 4$$

c) $T(t) = 3t + 12$ y $PU(t) = 250$

$$\lim_{t\to+\infty} PA = \lim_{t\to+\infty} \frac{T(t)}{PU(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t + 12}{250} = +\infty$$

EJERCICIOS

Funciones reales

5.25. (PAU) Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$. Determínese a, b y c sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos (–2, –3) y (1, 0).

Ambas funciones deben pasar por esos puntos, planteamos el sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} -3 = (-2)^2 + a(-2) + b \\ -3 = -(-2)^2 + c \\ 0 = 1^2 + a \cdot 1 + b \\ 0 = -1^2 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 4 - 2a + b \Rightarrow b = 2a - 7 \\ -3 = -4 + c \Rightarrow c = 1 \\ 0 = 1 + a + b \Rightarrow 0 = 1 + a + 2a - 7 \Rightarrow a = 2 \\ 0 = -1 + c \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Las funciones son: $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y $g(x) = -x^2 + 1$.

5.26. Encuentra la parábola que pasa por los puntos $A(0, -1)$, $B(1, 2)$ y $C(2, 3)$.

La ecuación de la parábola es $y = ax^2 + bx + c$. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} -1 = c \\ 2 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \quad \text{cuyas soluciones son } a = -1,\ b = 4 \text{ y } c = -1$$

La parábola es $y = -x^2 + 4x - 1$.

5.27. Expresa la función $f(x) = |2x + 4| - |x - 1|$ como una función definida a trozos y dibuja su gráfica.

$|2x + 4| = 2x + 4$ si $x \geq -2$ y $|2x + 4| = -(2x + 4) = -2x - 4$ si $x < -2$

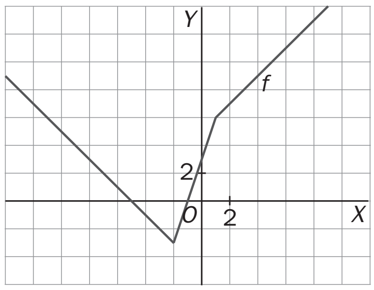
$|x - 1| = x - 1$ si $x \geq 1$ y $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ si $x < 1$

Observa cómo queda la expresión dependiendo de los valores de x:

$-2x-4-(-x+1)=-x-5$	-2	$2x+4-(-x+1)=3x+3$	1	$2x+4-(x-1)=x+5$

La expresión de f como función definida a trozos es:

$$f(x) = \begin{cases} -x-5 & \text{si } x < -2 \\ 3x+3 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x+5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Operaciones con funciones

5.28. Escribe las siguientes funciones como composición de funciones elementales:

a) $A(x) = (5x - 2)^{12}$ **c)** $C(x) = \dfrac{1}{\ln x^2}$

b) $B(x) = \cos\sqrt{e^{x-1}}$ **d)** $D(x) = e^{\sqrt{\operatorname{sen} x^5}}$

a) $f(x) = 5x - 2;\quad g(x) = x^{12} \Rightarrow A(x) = (g \circ f)(x)$

b) $f(x) = x - 1;\quad g(x) = e^x;\quad h(x) = \sqrt{x};\quad p(x) = \cos x \Rightarrow B(x) = (p \circ h \circ g \circ f)(x)$

c) $f(x) = x^2;\quad g(x) = \ln x;\quad h(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow C(x) = (h \circ g \circ f)(x)$

d) $f(x) = x^5;\quad g(x) = \operatorname{sen} x;\quad h(x) = \sqrt{x};\quad p(x) = e^x \Rightarrow B(x) = (p \circ h \circ g \circ f)(x)$

5.29. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$:

a) Calcula la función $(f \circ f)(x)$.

b) Catalina asegura que $(f \circ f)(-1) = 0$, y Gloria afirma que $(f \circ f)(-1)$ no existe.

¿Quién de las dos tiene razón?

a) $(f \circ f)(x) = f\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{x+1}{x+2}$

b) Gloria tiene razón, pues como $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$, $x = -1$ no está en el dominio de $(f \circ f)$.

5.30. Calcula la función inversa de:

a) $f(x) = x^3 - 8$ **b) $f(x) = \dfrac{2x-5}{3}$**

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+8}$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+5}{2}$

5.31. Sean las funciones f y g definidas así:

$$f(x) = \begin{cases} 5x-7 & \text{si } x < -1 \\ 1-3x & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{si } x < 2 \\ x+7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentra la expresión de la función suma $s(x) = (f + g)(x)$.

	–1		2	
$f(x) = 5x - 7$ $g(x) = 3 - 2x$ $s(x) = 3x - 4$		$f(x) = 1 - 3x$ $g(x) = 3 - 2x$ $s(x) = 4 - 5x$		$f(x) = 1 - 3x$ $g(x) = x + 7$ $s(x) = 8 - 2x$

$$s(x) = \begin{cases} 3x-4 & x < -1 \\ 4-5x & -1 \leq x < 2 \\ 8-2x & x \geq 2 \end{cases}$$

Límite de una función en un punto

5.32. La función $f(x)$ no está definida para $x = 1$. Observando la tabla de valores siguiente, contesta razonadamente:

x	0,99	0,999	1,001	1,01
$f(x)$	3,02	3,001	–2,99	–2,95

a) ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$? b) ¿Crees que existe $\lim_{x\to 1} [f(x)]^2$?

a) Parece que no, pues a la vista de los datos parece que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -3$.

b) Parece que sí; por lo visto en el apartado a, sería $\lim_{x\to 1} [f(x)]^2 = 9$.

5.33. La función $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ no está definida para $x = 2$. Con ayuda de la calculadora, obtén el límite $\lim_{x\to 2} f(x)$.

x	1,9	2,1	1,99	2,01
$f(x)$	2,92564	3,07561	2,99251	3,00751

A la vista de los datos, parece que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

5.34. **Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 5$, calcula:**

a) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]$

c) $\lim\limits_{x\to a}\left[3f(x)-g(x)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^2$

e) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{\left[f(x)\right]^2+g(x)+2}$

f) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^2$

a) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = 3+5 = 8$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = 3-5 = -2$

c) $\lim\limits_{x\to a}\left[3f(x)-g(x)\right] = 3\lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = 9-5 = 4$

d) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^2 = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^2 = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{\left[f(x)\right]^2+g(x)+2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to a}\left(\left[f(x)\right]^2+g(x)+2\right)} = \sqrt{9+5+2} = 4$

f) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^2 = \left[\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)\right]^2 = \left[\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\right]^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

5.35. **Dibuja en cada caso una gráfica para una posible función que se comporte de la siguiente manera cerca de $x = 2$.**

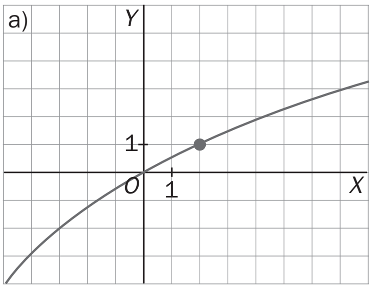
a) $f(2) = 1$ **y** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

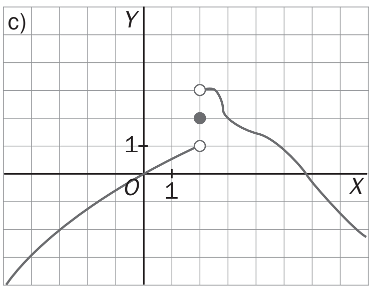
b) $f(2) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$

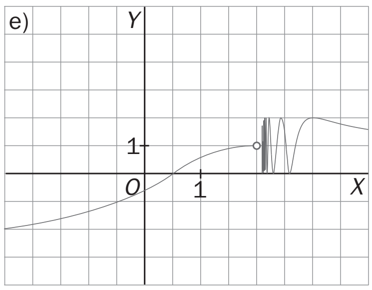
c) $f(2) = 2$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$

d) $f(2)$ **no está definida;** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$

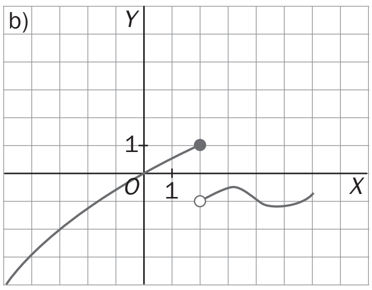
e) $f(2)$ **no está definida;** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **no existe.**

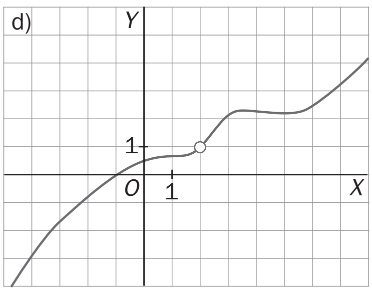






Nota: A la derecha del 2 la función es oscilante





5.36. La función *f* está definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si} \quad x<-1\\ e^{1+x} & \text{si} \quad x\geq -1\end{cases}$$

Ayudándote de la calculadora, obtén los límites laterales $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, y después, decide si existe o no el límite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

x	–1,1	–1,01	–0,9	–0,99
f(*x*)	–2,1	–2,01	1,105171	1,01005

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-2$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$, luego no existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

5.37. ¿Existe el límite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{|x|-3}$?

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{|x-3|}{|x|-3}=\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-x+3}{x-3}=-1$ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{|x-3|}{|x|-3}=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{x-3}=1$, luego el límite no existe.

5.38 Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

x	0,1	0,01
f(*x*)	$0,1^{10}$ = 0,0000000001	$0,01^{100}$ = 0,0000…

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}=0$

Límites infinitos y en el infinito

5.39. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(3x^2+x+1\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3x^2+x+1\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-x^2+4x+5\right)$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(-x^2+4x+5\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2-x^4\right)$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^2-x^4\right)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(3x^2+x+1\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3x^2+x+1\right)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-x^2+4x+5\right)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(-x^2+4x+5\right)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2-x^4\right)=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^2-x^4\right)=-\infty$

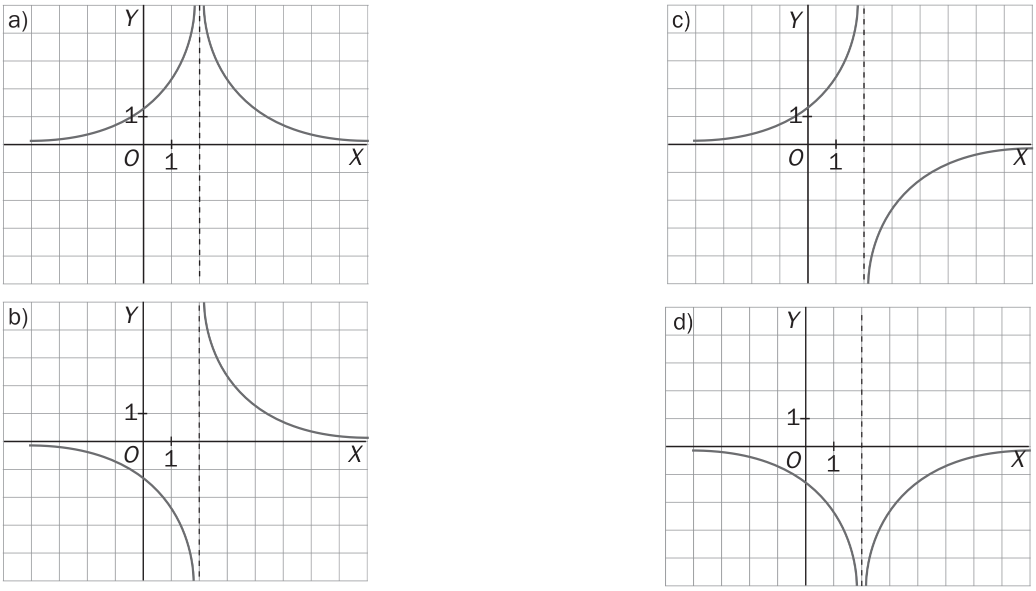
5.40. Dibuja posibles gráficas para estas cuatro funciones que cumplan estos dos requisitos cada una:

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ **y** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$ **y** $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -\infty$ **y** $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} i(x) = -\infty$ **y** $\lim\limits_{x \to 2^-} i(x) = -\infty$



5.41. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} = +\infty$

5.42. Calcula estos límites. No olvides estudiar los límites laterales.

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x+1)^2}{x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2-1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{x+1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x+1)^2}{x-3}$. No existe, pues $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{(x+1)^2}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{(x+1)^2}{x-3} = +\infty \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2-1}$. No existe, pues $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = +\infty \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{x+1}$. No existe, pues $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x+1}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+1}{x+1} = -\infty \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-3)}{(x-2)}$. No existe, pues $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{(x-3)}{(x-2)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{(x-3)}{(x-2)} = -\infty \end{cases}$

5.43. Calcula los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}}$

a) $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{2+x}-1\right)\left(\sqrt{2+x}+1\right)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{\left(\sqrt{8-x}-3\right)\left(\sqrt{2+x}+1\right)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{(-1-x)\left(\sqrt{2+x}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{8-x}+3}{-\sqrt{2+x}-1}=\frac{6}{-2}=-3$$

b) Este límite no existe, pues:

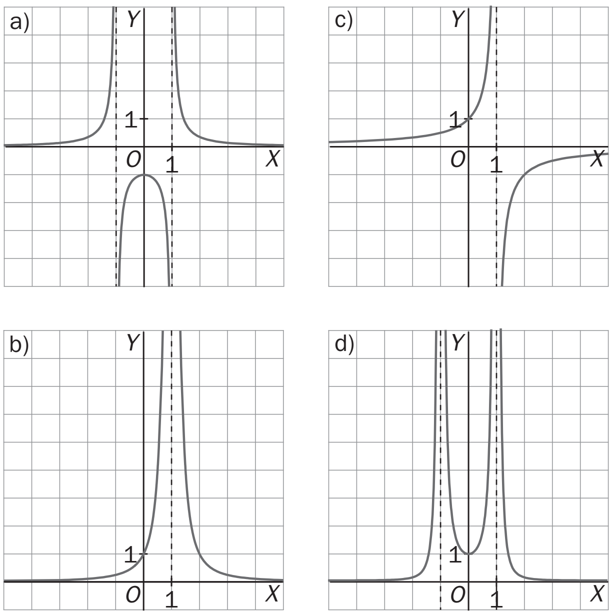
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{-(x-1)}=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{-(x-1)}=+\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{-(x-1)}=-\infty\end{cases}$$

5.44. Las gráficas siguientes corresponden a cuatro funciones que no están definidas en x = 1. Asocia cada gráfica con alguna de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$



La gráfica a) corresponde a la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

La gráfica b) corresponde a la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

La gráfica c) corresponde a la función $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

La gráfica d) corresponde a la función $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Cálculo de límites

5.45. Calcula todos estos límites.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x)^2-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-2}{2x+5}$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3-x}{5+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

10) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5-x}{x+5}$

13) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-1}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x-5\sqrt{x}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}$

16) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}$

17) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-3x^2+2x\right)$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3x-1}{(x+1)^2}$

19) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-1}{x^2-x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x^2-x}$

21) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

22) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

23) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right)$

24) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

25) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}-\dfrac{2+x}{1+x}\right)$

26) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(2-x)(8x-3)}{(2x-1)^2}$

27) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}\right)$

28) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3-3x^2+25x\right)$

29) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-12x^2+7x+1}{(2x+1)(1-4x)}$

30) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

31) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+7x-5}}{2x-9}$

32) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+3x}\right)$

33) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right)$

34) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$

35) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+6x+9}{x-3}$

36) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x)^2-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+2)}=\dfrac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{4+6}{4-2}=\dfrac{10}{2}=5$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{9-9}{9+3}=0$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{1-3}{1+1}=-1$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{3}{-1}=-3$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-2}{2x+5}=\dfrac{3}{2}$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3-x}{5+x}=-1$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

10) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(x+10)}{\sqrt{x}-3}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(x+10)(\sqrt{x}+3)}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}(x+10)(\sqrt{x}+3)=19\cdot 6=114$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+4)(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4)(x+2)=8\cdot 4=32$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5-x}{x+5}=-1$

13) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{x-1}=\left(\frac{8}{2}\right)^2=16$

14) $\lim_{x\to+\infty}\left(3x-5\sqrt{x}\right)=+\infty$

15) $\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{(x-1)^2}=-\infty$

16) $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}=\sqrt{5^2-9}=4$

17) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+2x\right)=+\infty$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{5^x+3x-1}{(x+1)^2}=\frac{1+0-1}{1}=0$

19) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

20) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

21) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=+\infty$

22) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=-\infty$

23) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3x}-\frac{3}{2x+1}\right)=0-0=0$

24) $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{x+1-x}{x(x+1)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$

25) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)=1-1=0$

26) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-x)(8x-3)}{(2x-1)^2}=-2$

27) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5}{\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x}\right)}=+\infty$

28) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+25x\right)=-\infty$

29) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-12x^2+7x+1}{(2x+1)(1-4x)}=\frac{-12}{-8}=\frac{3}{2}$

30) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(x^2+x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{(x^2+x+1)}=-1$

31) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+7x-5}}{2x-9}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

32) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+3x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{4x^2+3x}\right)\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)}{\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2-3x}{\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)}=-\infty$

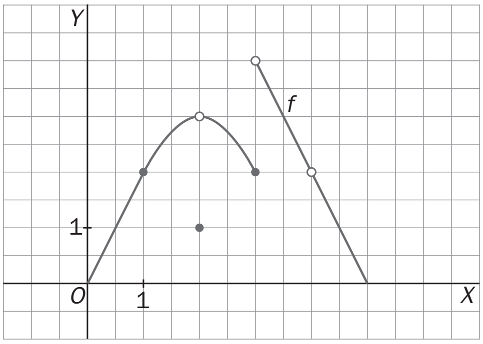
33) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x+1}\right)=-\infty$

34) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}=\frac{1}{2}$

35) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+6x+9}{x-3}=+\infty$

36) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-5)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-5)=-3$

5.46. Analiza la representación gráfica de la función $f(x)$ y calcula:



a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to 3} f(x)$ **e)** $f(1)$ **g)** $f(3)$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ **d)** $\lim_{x\to 4} f(x)$ **f)** $f(2)$ **h)** $f(4)$

a) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

b) $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

c) $\lim_{x\to 3} f(x)$. No existe, porque $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$.

d) $\lim_{x\to 4} f(x) = 2$

e) $f(1) = 2$

f) $f(2) = 1$

g) $f(3) = 2$

h) $f(4)$ no existe.

5.47. Calcula el valor de a para que se verifique que: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right) = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)} = \frac{a}{2} = 2.$$

Luego $a = 4$

5.48. Pon un ejemplo de dos funciones f y g tales que no existan $\lim_{x\to 1} f(x)$ ni $\lim_{x\to 1} g(x)$, pero sí exista $\lim_{x\to 1}\left(f(x)+g(x)\right)$.

Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = e^x - \dfrac{x+1}{x-1}$, se cumplen las condiciones.

En general, si $H(x)$ es una función tal que existe $\lim_{x\to 1} H(x)$ y $F(x)$ otra función con $F(1) \neq 0$, las condiciones se cumplen para $f(x) = \dfrac{F(x)}{x-1}$ y $g(x) = H(x) - \dfrac{F(x)}{x-1}$.

5.49. Efectúa el límite $\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$, en el que f es la función $f(x) = x^2 - 3x$.

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^2-3(x+h)-(x^2-3x)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h(h+2x-3)}{h}\right) = 2x-3$$

5.50. (PAU) Calcula el límite $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{x^3-3x+2}{(1-x)(1-x^3)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(1-x^3)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x^3)}\right) = \frac{0}{0}$$

Por el Teorema de L´Hôpital: $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x^3)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{-3x^2}\right) = \dfrac{3}{-3} = -1$

5.51. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \text{sen}\, x$

b) $f(x) = x \cdot e^x + x^2$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+25}$

e) $f(x) = x^2 - \ln x$

f) $f(x) = x+2$

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-25}$

a) $f(x) = \text{sen}\, x$ Es continua en todo **R**.

b) $f(x) = x \cdot e^x + x^2$ Es continua en todo **R** por ser producto y suma de continuas.

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3}$ Es continua en **R –** $\left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$.

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+25}$ Es continua en todo **R** por ser cociente de continuas y no anularse nunca el denominador.

e) $f(x) = x^2 - \ln x$ Es continua en $(0, +\infty)$.

f) $f(x) = x+2$ Es continua en todo **R**.

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ Es continua en **R –** $\{0\}$.

h) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-25}$ Es continua en **R –** $\{5, -5\}$.

5.52. (PAU) Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ x^2 & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

La función es continua en (–2, 2) $\cup$(2, 3) por ser continuas las funciones 16 – x^2 y x^2.
Debemos estudiar qué ocurre en x = 2:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (16 - x^2) = 12 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x^2 = 4 = f(2) \end{cases}$$

La función no es continua en x = 2, pues no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ al no coincidir los límites laterales. Es una discontinuidad de salto finito.

5.53. La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 1}$ **no está definida para x = 1 ni para x = –1. ¿Qué valores hay que adjudicar a f(1) y f(–1) para que la función f sea continua en R?**

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = -2 \ \text{ y } \ \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = -4$$

Se debe definir f(1) = –2 y f(–1) = –4 para que sea continua.

5.54. (PAU) Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-9 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{9x-27}{x+3} & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) Estúdiese la continuidad en el punto x = 0.

b) Calcúlese el límite cuando x tiende a $-\infty$ y cuando x tiende a $+\infty$.

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-9)=-9=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{9x-27}{x+3}=-9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-9)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{9x-27}{x+3}=9 \end{cases}$

Luego la función es contiuna en x = 0.

5.55. (PAU) Calcula k para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<5 \\ 4x+k & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$$

La función es continua en **R** – {5}. Veamos qué ocurre en x = 5.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}(x^2-1)=24 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}(4x+k)=20+k=f(5) \end{cases}$ Para que sea continua debe ser 24 = 20 + k, k = 4.

5.56. (PAU) Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x>2 \end{cases}$ **.**

En $(-\infty,\ 2)-\{1\}$, la función es continua, y en $(2,+\infty)$ también, por ser cocientes de polinomios y no anularse los denominadores. Veamos qué ocurre si x = 1 y si x = 2:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{x-1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad de salto infinito en x = 1.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-1}=4=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x^2-2x}{x+2}=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad de salto finito en x = 2.

Así pues, la función es continua en **R** – {1, 2}.

5.57. (PAU) Calcula los valores de a, b $\in$ R para que la función $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0<x<1 \\ bx & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

sea continua en todo punto.

Debemos ver qué ocurre en x = 0 y en x = 1, ya que en el resto es continua.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+a)=a=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Para que sea continua en x = 0, debe ser $a=\dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} bx=b=f(1) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Para que sea continua en x = 1, debe ser $b=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

5.58. (PAU) Sea $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x<1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$. ¿Para qué valores del parámetro *a* la función es continua?

La función es continua si $x \neq 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 = f(1)\end{cases}$$

Debe ser $(1 + a)^2 = 1$, $a = 0$ o $a = -2$.

5.59. La función *f*(*x*) está definida en R por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\leq 2 \\ a-x & \text{si } x>2\end{cases}$$

a) Calcula el valor de *a* para que *f* sea continua en R.

b) Calcula el valor de *a* para que la función tenga en *x* = 2 un salto de 3 unidades hacia arriba.

c) Calcula el valor de *a* para que la función tenga en *x* = 2 un salto de 5 unidades hacia abajo.

a) Miremos qué ocurre en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-1) = 3 = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (a-x) = a-2\end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua debe ser } a-2=3;\ a=5.$$

b) Para que tenga un salto de tres unidades hacia arriba debe ser $a - 2 = 6$, $a = 8$.

c) Para que tenga un salto de cinco unidades hacia abajo debe ser $a - 2 = -2$, $a = 0$.

5.60. Determina *a* y *b* para que la siguiente función sea continua en todos sus puntos:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } x<0 \\ x-a & \text{si } 0\leq x<1 \\ \dfrac{a}{x}+b & \text{si } 1\leq x\end{cases}$$

Como $\dfrac{a}{x}+b$ es continua en $(1, +\infty)$, solo debemos estudiar qué ocurre en $x = 0$ y en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 0} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax^2+b) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-a) = -a = f(0)\end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua, debe ser } b=-a.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x-a) = 1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{a}{x}+b = a+b = f(1)\end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua en } x=1, \text{ debe ser } 1-a=a+b.$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} b=-a \\ 1-a=a+b\end{cases}$ obtenemos $a = 1$, $b = -1$.

Teoremas relacionados con la continuidad

5.61. Demuestra que la ecuación $x^5 - x^2 + x - 5 = 0$ tiene alguna solución real.

$f(x) = x^5 - x^2 + x - 5$ es continua en $[0, 2]$, $f(0) = -5 < 0$ y $f(2) = 25 > 0$. Usando el teorema de Bolzano sabemos que hay un número *c* entre 0 y 2 con $c^5 - c^2 + c - 5 = 0$.

5.62. Demuestra que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución real menor que 2 y mayor que 1.

$f(x) = x^3 + x - 5$ es continua en $[1, 2]$, $f(1) = -3 < 0$ y $f(2) = 5 > 0$. Usando el teorema de Bolzano sabemos que hay un número *c* entre 1 y 2 con $c^3 + c - 5 = 0$.

5.63. a) Comprueba que la ecuación $x^3 + 4x^2 - 5x - 4 = 0$ tiene tres raíces reales. Para ello, estudia el signo de la función en algunos valores enteros.

b) Calcula tres intervalos de longitud 1 en los que estén incluidas las raíces.

a) Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x - 4$

$f(-6) = -46 < 0$ y $f(-2) = 14 > 0$ entre –6 y –2 hay una raíz real.

$f(-2) = 14 > 0$ y $f(0) = -4 < 0$ entre –2 y 0 hay una raíz real.

$f(0) = -4$ y $f(2) = 10$ entre 0 y 2 hay una raíz real.

b) Los intervalos de longitud 1 donde están incluidas las raíces son:

(–5, –4), (–1, 0) y (1, 2)

Funciones y límites en las Ciencias Sociales

5.64. (PAU) El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora la siguiente función indicará en cada momento (*t*, medido en meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0,4t} & t > 10 \end{cases}$$

a) Confirma que dicha función es continua y que, por tanto, no presenta un salto en $t = 10$.

b) Por mucho tiempo que pase, ¿a qué porcentaje no se llegará nunca?

a) Si $t \neq 10$, la función es continua por estar definida por un polinomio o un cociente de polinomios con denominador no nulo en su dominio de definición.

$$\lim_{t \to 10} P(t): \begin{cases} \lim\limits_{t \to 10^-} P(t) = \lim\limits_{t \to 10^-} t^2 - 8t + 50 = 70 = f(10) \\ \lim\limits_{t \to 10^+} P(t) = \lim\limits_{t \to 10^+} \dfrac{38t - 100}{0,4t} = 70 \end{cases} \Rightarrow \text{Luego } P(x) \text{ es continua en } t = 10.$$

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{38t - 100}{0,4t} = \dfrac{38}{0,4} = 95$

Nunca se llegará al 95% de pacientes operados sin necesidad de entrar en lista de espera.

5.65. (PAU) Un comercio abre sus puertas a las nueve de la mañana y las cierra cuando se han marchado todos los clientes. El número de clientes viene dado por la función $C(t) = -t^2 + 8t$, siendo *t* el número de horas transcurridas desde la apertura. El gasto por cliente (en euros) también depende de *t* y decrece a medida que pasan las horas siguiendo la función $G(t) = 300 - 25t$.

a) ¿A qué hora se produce la mayor afluencia de clientes?

b) ¿A qué hora se cierra el comercio?

c) ¿Cuánto gasta el último cliente que abandonó el local?

d) Encuentra la función que nos da la recaudación dependiendo del tiempo.

e) ¿Cuándo hay mayor recaudación, en la cuarta o en la quinta hora?

a) Al ser $C(t) = -t^2 + 8t$ una parábola, su máximo lo alcanza en el vértice, que es $V(4, 16)$, luego la máxima afluencia se produce a 4 horas de abrir, esto es, a las 13.00, y es de 16 clientes.

b) El negocio cierra cuando $C(t) = -t^2 + 8t = 0$, a las 8 horas de abrir, o sea, a las 17.00.

c) El último cliente abandona el local cuando $t = 8$ y gasta $G(8) = 300 - 25 \cdot 8 = 100$ euros.

d) La recaudación en una hora es el producto del número de clientes en esa hora por el gasto de cada cliente en esa hora. Así pues, $R(t) = C(t) \cdot G(t) = (-t^2 + 8t)(300 - 25t)$.

e) $R(4) = (-4^2 + 8 \cdot 4)(300 - 25 \cdot 4) = 3200$ euros

$R(5) = (-5^2 + 8 \cdot 5)(300 - 25 \cdot 5) = 2625$ euros

La recaudación es mayor en la cuarta hora que en la quinta.

5.66. Se ha estimado que la población de un barrio periférico de una gran ciudad evolucionará siguiendo este modelo: $P(t) = \dfrac{240 + 20t}{16 + t}$ · miles de habitantes, donde *t* indica los años transcurridos desde su creación en el año 2005.

a) ¿Qué población tenía dicho barrio en el año 2005?

b) ¿Qué población tendrá dicho barrio en el año 2015?

c) ¿Será posible que la población del barrio duplique a la población inicial?

d) A largo plazo, ¿la población se estabilizará o no?

a) $P(0) = \dfrac{240}{16} = 15$. El barrio tenía 15 000 habitantes en 2005.

b) Habrán pasado 10 años desde su creación y, por tanto, t = 10.

$P(10) = \dfrac{240 + 200}{16 + 10} \approx 16{,}923$. Habrá 16 923 habitantes en 2015.

c) $P(t) = 2 \cdot P(0)$, $P(t) = \dfrac{240 + 20t}{16 + t} = 30 \Rightarrow 240 + 20t = 480 + 30t \Rightarrow t = -24$. No, el barrio nunca duplicará su población.

d) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{240 + 20t}{16 + t} = 20$. La población se estabilizará en 20 000 habitantes.

5.67. (PAU) Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función $I(x) = 28x^2 + 36\,000x$, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse, en este caso, mediante la función $G(x) = 44x^2 + 12\,000x + 700\,000$, donde, en ambas funciones, *x* representa la cantidad de unidades vendidas. Determínese:

a) La función que define el beneficio anual en euros.

b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo.

c) El beneficio máximo.

a) $B(x) = I(x) - G(x) = (28x^2 + 36\,000x) - (44x^2 + 12\,000x + 700\,000) = -16x^2 + 24\,000x - 700\,000$.

b) Al ser la función de beneficios una parábola, el máximo se alcanzará en el vértice, que es $V(750,\ 8\,300\,000)$.

Los máximos beneficios se obtienen produciendo 750 unidades y son de 8 300 000 euros.

c) El beneficio máximo es de 8 300 000 euros.

5.68. Se sabe que los costes totales de fabricar *x* unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión $C(x) = 3x^2 - 27x + 108$.

a) Encuentra la función que nos da el coste unitario medio.

b) A medida que se fabrican más y más unidades, ¿está el beneficio medio acotado o crece indefinidamente?

a) El coste unitario es el cociente entre el coste total y el número de unidades producidas:

$$U(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{3x^2 - 27x + 108}{x}$$

b) $\lim\limits_{x' +\infty} U(x) = \lim\limits_{x' +\infty} \dfrac{3x^2 - 27x + 108}{x} = +\infty$. Luego el beneficio crece indefinidamente.

5.69. (PAU) La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $C(x) = 90 + 15x - 0{,}6x^2$, donde *x* es el tiempo transcurrido desde el 1 de enero de 1990, contado en años.

a) ¿Hasta qué año está creciendo la concentración de ozono?

b) ¿Cuál es la concentración máxima de ozono que alcanza esa ciudad?

a) Como la función de la concentración es una parábola, crecerá hasta el vértice $V(12{,}5;\ 183{,}75)$.

Luego ocurrirá a mediados del año 2002 y será de 183,75 microgramos por metro cúbico.

b) Es de 183,75 microgramos por metro cúbico.

5.70. Una constructora ha comprado una excavadora por 80 000 euros. El departamento financiero ha calculado que puede revenderla al cabo de *t* años al precio de $f(t)=\dfrac{80}{1+0,4t}$ miles de euros.

a) ¿Al cabo de cuántos años la excavadora perderá la mitad de su valor de compra?

b) Calcula el límite $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ y da una interpretación económica a este resultado.

a) $f(t)=\dfrac{f(0)}{2}$

$\dfrac{80}{1+0,4t}=40 \Rightarrow 80=40+16t \Rightarrow t=2,5$. A los dos años y medio.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{80}{1+0,4t}=0$. Al cabo del tiempo, la excavadora irá perdiendo su valor de compra.

5.71. Los beneficios mensuales de un artesano expresados en euros, que vende *x* objetos, se ajustan a la función *B*(*x*) = –0,5x^2 + 50*x* – 800, donde $20\le x\le 60$. Demuestra que las funciones beneficio y beneficio medio tienen un máximo.

La función beneficio es una parábola hacia abajo y, por tanto, alcanza su máximo en el vértice *V*(50, 450).

Como20 ≤ 50 ≤ 60, el máximo beneficio se obtiene vendiendo 50 objetos y es de 450 euros.

El beneficio medio es $\dfrac{-0,5x^2+50x-800}{x}$. Como la función es continua en el intervalo [20, 60], usando el teorema del máximo y del mínimo, concluimos que en dicho intervalo alcanza el máximo aunque aún no sabemos hallarlo.

5.72. Un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que el precio unitario que los consumidores aceptan pagar por cierto artículo depende de la cantidad *x* de dichos artículos que salen a la venta, siguiendo este modelo de demanda: $g(x)=\dfrac{170}{x+5}$ (*g*(*x*) en euros y *x* en miles de unidades).

Los productores han calculado que el precio unitario satisfactorio para ellos, dependiente de *x*, se rige según este modelo de oferta: *f*(*x*) = 3*x* + 2 (*f*(*x*) en euros y *x* en miles de unidades).

a) Calcula cuántas unidades deben ponerse a la venta para conseguir el punto de equilibrio, en el que la demanda y la oferta se igualan, y, por tanto, consumidores y fabricantes quedan satisfechos.

b) ¿Cuál es el precio unitario de este artículo en el punto de equilibrio?

a) *g*(*x*) = *f*(*x*): $\dfrac{170}{x+5}=3x+2 \Rightarrow 170=(x+5)(3x+2) \Rightarrow 3x^2+17x-160=0$, *x* = 5 o $x=-\dfrac{32}{3}$

(que no tiene sentido en este contexto). El punto de equilibrio se consigue fabricando 5000 unidades.

b) El precio unitario es *f*(5) = 17 euros.

PROBLEMAS

5.73. El balance económico mensual, en miles de euros, de una compañía vinícola viene dado por $f(x)=3-\dfrac{5}{x+2}$, $x\ge 0$, donde *x* es el precio, en euros, de una botella de vino. ¿A qué valor tienden sus ganancias o pérdidas a largo plazo?

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3-\dfrac{5}{x+2}=3$

Las ganancias tienden a 3000 euros mensuales.

5.74. Un grupo de suricatos huye de una fuerte sequía que asola su hábitat y comienza su peregrinaje en busca de agua en el instante $t = 0$. El número de individuos de la población sigue esta ley:

$P(t) = 140 - 4t - t^2$, donde t se mide en meses.

a) ¿Cuántos suricatos había al principio de la huida?

b) Demuestra que la población va siempre disminuyendo.

c) Finalmente no encontraron zonas con agua. ¿Cuándo despareció la población completamente?

a) $P(0) = 140$. Al comienzo había 140 individuos.

b) Al ser la función una parábola hacia abajo, a la derecha del vértice que está en $V(-2, 144)$ es siempre decreciente, luego la población va disminuyendo siempre.

c) $P(t) = 0$, $140 - 4t - t^2 = 0$, $t = -14$ y $t = 10$. La población desapareció a los 10 meses de comenzar el peregrinaje.

5.75. El coste mensual de las llamadas telefónicas de cierta compañía se obtiene sumando una cantidad fija (en concepto de alquiler de línea) con otra proporcional a la duración de las llamadas. En dos meses distintos se han pagado 21,14 euros por 13 horas y 27 minutos de llamadas y 23,60 euros por 15 horas y media de llamadas.

a) Encuentra la función que nos da el coste en función de los minutos hablados.

b) ¿Cuántos céntimos cobran por cada minuto hablado?

a) $C(t) = a + bt$, donde a es la cantidad fija, y b, el precio por minuto. Para hallar a y b resolvemos el sistema

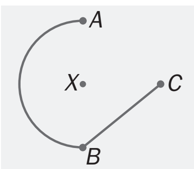
$$\begin{cases} 21{,}14 = a + 807b \\ 23{,}60 = a + 930b \end{cases}$$

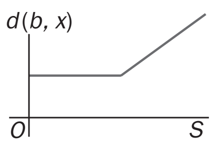
La solución del sistema es $a = 5$ y $b = 0{,}02$.

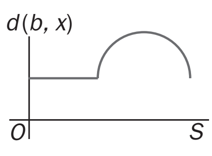
$C(t) = 5 + 0{,}02t$, con t medido en minutos.

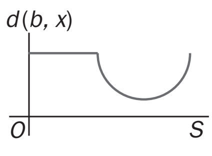
b) Cobran 0,02 céntimos por minuto.

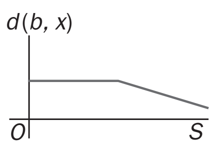
5.76. Un barco navega del punto A hasta el punto B, describiendo una semicircunferencia centrada en una isla X. Luego navega en línea recta desde B a C. ¿Cuál de las siguientes cinco gráficas muestra la distancia del barco a la isla, según la distancia recorrida?



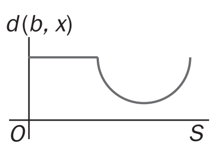








La gráfica que muestra la distancia del barco a la isla, según la distancia recorrida es:



5.77. La temperatura *y* en grados Fahrenheit (ºF) puede ser expresada como una función de primer grado de la temperatura *x* en grados Celsius (ºC). En la escala Fahrenheit el agua se congela a 32 ºF y hierve a 212 ºF.

a) Encuentra la función lineal que relaciona la temperatura en grados Fahrenheit con sus correspondientes grados Celsius.

b) Si la temperatura normal del cuerpo humano es de 37 ºC, ¿cuál es la temperatura normal en grados Fahrenheit?

a) $F = a + b\,C$, $32 = a + 0 \cdot b$ y $212 = a + 100\,b$. Resolvemos el sistema y obtenemos que $a = 32$ y $b = 1{,}8$.

La función es $F = 32 + 1{,}8\,C$, y su inversa, $C = \dfrac{F-32}{1{,}8}$.

b) $F = 32 + 1{,}8 \cdot 37 = 98{,}6$ ºF

5.78. Una empresa produce ratones inalámbricos en grandes cantidades. Atendiendo a los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, al salario de sus trabajadores y a otros factores, se ha llegado a la conclusión de que producir *p* ratones tiene un coste total, en euros, de $C(p) = 10p + 100\,000$.

a) Encuentra la expresión de la función C_m que nos da el precio unitario medio de un ratón al fabricar *p* unidades.

b) Calcula $C_m(10)$ y $C_m(1000)$. ¿A qué es debido que haya tanta diferencia entre un coste y otro?

c) Calcula $\lim\limits_{p\to+\infty} C_m(p)$ y da una interpretación económica al resultado.

a) $C_m(p) = \dfrac{10p + 100000}{p} = 10 + \dfrac{100000}{p}$

b) $C_m(10) = 10 + \dfrac{100000}{10} = 10010$; $C_m(1000) = 10 + \dfrac{100000}{1000} = 110$

La diferencia se debe a que los gastos de producción disminuyen a medida que aumentan las unidades fabricadas.

c) $\lim\limits_{p\to+\infty} C_m(p) = \lim\limits_{p\to+\infty} (10 + \dfrac{100000}{p}) = 10$.

El coste de producción tiende a estabilizarse en torno a los 10 euros cuando la producción es muy elevada.

PROFUNDIZACIÓN

5.79. Calcula el siguiente límite ayudándote de la calculadora puesta en modo radianes:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$$

x	1	10	100	1000
***f*(*x*)**	1,09242	1,00001	1	1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x} = 1$$

5.80. Calcula este límite: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{a}{x}} + 1\right)} = \frac{a}{2}$$

5.81. Comprueba que los límites del tipo $1^{+\infty}$ dan lugar a indeterminaciones. Para ello, obtén con la calculadora una aproximación de estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+6}\right)^{x+1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x^2-1}{x^2+6}\right)^{3x-2}$

a)

x	10	100	1000	10 000	99 999 999 999
$f(x)$	2041,41918	2765,39059	2957,3549	2978,57568	2980,95565

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x} \approx 2981$. En realidad, el límite es e^8.

b)

x	10	100	1000	10 000	99 999 999 999
$f(x)$	5,15978	7,10259	7,35959	7,3861	7,38906

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1} \approx 7{,}39$. En realidad, el límite es e^2.

c)

x	10	100	1000	10 000	99 999 999 999
$f(x)$	1,94813	2,58148	2,70346	2,71678	2,71828

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+6}\right)^{x+1} \approx 2{,}7$. En realidad, el límite es e.

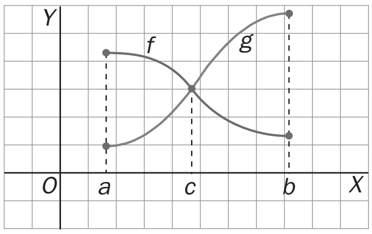
d)

x	10	100
$f(x)$	104 844 072	$4{,}58\cdot10^{89}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x^2-1}{x^2+6}\right)^{3x-2} = +\infty$

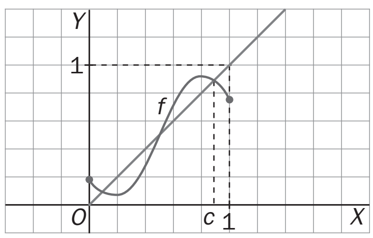
5.82. Demuestra que si *f* y *g* son funciones continuas en el intervalo cerrado [*a*, *b*] con *f*(*a*) > *g*(*a*) y *f*(*b*) < *g*(*b*), entonces existe un número *c* en [*a, b*] tal que *f*(*c*) = *g*(*c*).

(Ayúdate de la función *F*(*x*) = *f*(*x*) – *g*(*x*).)



La función $F(x) = f(x) - g(x)$ es continua en $[a, b]$ por ser diferencia de funciones que lo son. Además, como $f(a) > g(a)$, $F(a) = f(a) - g(a) > 0$ y $f(b) < g(b)$, $F(b) = f(b) - g(b) < 0$. Por el teorema de Bolzano sabemos que existe al menos un número c en $[a, b]$ con $F(c) = f(c) - g(c) = 0$ y, por tanto, $f(c) = g(c)$.

5.83. Sea *f* una función continua en el intervalo cerrado [0, 1] y con 0 ≤ *f*(x) ≤ 1 para cada *x* en [0, 1]. Demuestra que existe un número real *c* en [0, 1] para el que se cumple que *f*(*c*) = *c*.



Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, ya está probado tomando $c = 0$ o $c = 1$. Si no es así, tenemos que $0 < f(0) \le 1$ y $0 \le f(1) < 1$. Consideremos la función $g(x) = x$, que es continua en $[0, 1]$. Como $f(0) > g(0) = 0$ y $f(1) < g(1) = 1$, usando el problema precedente sabemos que existe c con $f(c) = g(c)$, luego $f(c) = c$.

5.84. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.

Las funciones son continuas en el intervalo cerrado [1, 2], 0 = $f(1) < g(1) = e^{-1}$ y $\ln 2 = f(2) > g(2) = e^{-2}$. Usando el problema 79 sabemos que existe un número c en [0, 2] tal que $\ln c = e^{-c}$.

5.85. Dada la función racional $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}$, se pide:

a) Demostrar que esta función está definida para todos los reales menos para $x = 1$.

b) ¿Qué valor deberíamos asignar a $f(1)$ para que f sea continua en todo R?

a) Veamos dónde se anula el denominador: $x^3+7x-8=(x-1)(x^2+x+8)=0$ si $x = 1$, pues $x^2 + x + 8$ no tiene raíces reales.

b) $f(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+8)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)}{(x^2+x+8)}=\dfrac{1}{5}$

5.86. Dada la función $f(x)=\dfrac{|x-3|}{|x+1|}$

a) Escríbela como una función definida a trozos.

b) A continuación calcula los límites laterales en $x = -1$ y en $x = 3$.

a) $|x-3| = x-3$ si $x \ge 3$ y $|x-3| = -(x-3)$ si $x < 3$

$|x+1| = x+1$ si $x \ge -1$ y $|x+1| = -(x+1)$ si $x < -1$

$\boxed{f(x)=\dfrac{-(x-3)}{-(x+1)}}$ $\quad -1 \quad$ $\boxed{f(x)=\dfrac{-(x-3)}{x+1}}$ $\quad 3 \quad$ $\boxed{f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x+1} & x<-1\\[2mm] \dfrac{3-x}{x+1} & -1<x<3\\[2mm] \dfrac{x-3}{x+1} & 3\le x\end{cases}$$ Si $x = -1$, la función no está definida, pues se anula el denominador.

b) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-3}{x+1}=+\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3-x}{x+1}=+\infty\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3-x}{x+1}=0\\[2mm] \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x-3}{x+1}=0\end{cases}$

5.87. Estudia si la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ es continua en $x = 1$.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{1-x} & x<1\\[2mm] \dfrac{x^2-1}{x-1} & x>1\end{cases}$$ Observa que si $x = 1$, la función no está definida, pues se anula el denominador.

$$\lim_{x\to1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}-(x+1)=-2\\[2mm] \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2\end{cases}$$ $\Rightarrow$ La función no es continua en $x = 1$.

5.88. Determina de las siguientes afirmaciones cuáles son siempre ciertas y cuáles pueden ser falsas.

a) Si *f*(1) < 0 y *f*(2) > 0, debe haber un número *c* en (1, 2) tal que *f*(*c*) = 0.

b) Si *f* es continua en [1, 2] y hay un número *c* en (1, 2) tal que *f*(*c*) = 0, entonces *f*(1) y *f*(2) deben ser de diferente signo.

c) Si *f* es continua en [1, 2] y nunca se anula en (1, 2), entonces *f*(1) y *f*(2) tienen el mismo signo.

a) No es siempre cierta. Depende de si *f* es continua o no en el intervalo [1, 2].

Por ejemplo, si $f(x) = 2x - 3$, la afirmación es cierta, pero si $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \le \frac{3}{2} \\ 5 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$, es falsa.

b) No es siempre cierta; por ejemplo, si $f(x) = 0$ o si $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$, se cumplen las hipótesis y, sin embargo, *f*(1) y *f*(2) no tienen distinto signo.

c) Sí es cierta, pues si *f*(1) y *f*(2) tuvieran distinto signo, por el teorema de Bolzano, existiría un número *c* en (1, 2) con *f*(c) = 0.

5.89. La cantidad, *q*(*t*), que queda de una masa de *M* mg de una sustancia radiactiva al cabo de *t* días viene expresada por la fórmula $q(t) = M \cdot e^{-0,1 \cdot t}$.

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo la masa *M* se ha reducido a la mitad?

b) Si la masa inicial *M* es de 27 mg, ¿cuánta sustancia quedará aproximadamente al cabo de 10 días?

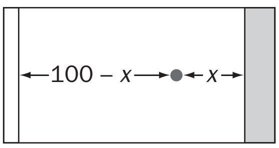
c) Calcula el límite $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t)$ e interpreta el resultado obtenido.

a) $M \cdot e^{-0,1 \cdot t} = \dfrac{M}{2} \Rightarrow t = 10\ln 2$, aproximadamente 7 días

b) $q(10) = 27 \times e^{-0,1 \cdot 10} = \dfrac{27}{e}$ » 9,933 mg

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} M \cdot e^{-0,1t} = 0$ mg. La radiactividad desaparecerá al cabo del tiempo.

5.90. En un estadio de fútbol tuvo lugar un concierto de rock. Se colocaron dos inmensas torres de sonido que ocupan los fondos, enfrentadas entre sí: una en la parte trasera del estadio, y otra en el escenario, tres veces más potente que la primera. La intensidad del sonido en un punto es proporcional a la potencia de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Sabiendo que la distancia entre las torres de sonido es de 100 m, encuentra la función que nos da la intensidad del sonido según a la distancia a la que nos situemos del escenario.



$$I(x) = \frac{3k}{x^2} + \frac{k}{(100 - x)^2}$$

5.91. Joaquín sale de excursión a las siete de la mañana desde el aparcamiento y llega al refugio a las cinco de la tarde. Al día siguiente, de regreso, sale del refugio por la mañana y llega al coche por la tarde.

Demuestra que hay un punto del recorrido por el que pasó justo a la misma hora a la ida y a la vuelta.

De forma intuitiva, supongamos que mientras que Joaquín camina desde el refugio al aparcamiento, un amigo suyo hace el camino que Joaquín hizo el día anterior ,es decir, desde el aparcamiento hasta el refugio. A cierta hora, en un punto del recorrido Joaquín y su amigo se encontraran, esto quiere decir que Joaquín pasará a la misma hora por un punto del recorrido a la ida y a la vuelta de su excursión.

Aplicando el Teorema de Bolzano: Sea *f* la función de ida y *g* la función de vuelta, son funciones continuas en un intervalo cerrado[*a*, *b*] con *f*(*a*) < *g*(*a*) y *f*(*b*) > *g*(*b*),tomando la función *F*(*x*)=*g*(*x*) – *f*(*x*) y la demostración del ejercicio 82,sabemos que existe un punto *c* del recorrido en el que *F*(*c*)=*g*(*c*) – *f*(*c*)=0 y por tanto, *f*(*c*) = *g*(*c*).

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

5.1. Se consideran las funciones *f*, *g* y *h*, definidas en R, tales que para todo número real *x* se tiene que *f*(*x*) ≤ *g*(*x*) ≤ *h*(*x*).

Si además $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, se puede deducir:

A) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

B) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

C) $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

D) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

E) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

La respuesta correcta es la C) porque como *f*(*x*) ≤ *g*(*x*) ≤ *h*(*x*) para todo *x* entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) \le \lim_{x\to+\infty} g(x) \le \lim_{x\to+\infty} h(x)$.

Para descartar las opciones A), B) y C) basta considerar las funciones *f*(*x*) = 1 para todo *x*, $g(x) = x^2 + 2$ y $h(x) = x^2 + 4$.

Para descartar E) consideremos $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 +1$ y $h(x) = x^2 + 2$, en este caso $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

5.2. Considera la función $f(x) = e^{-x^2+3}$. Entonces, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ es igual a:

A) $+\infty$

B) 0

C) e^3

D) No existe.

E) Es finito, pero distinto de 0 y de e^3.

Sin más que observar que $\lim_{x\to-\infty} (-x^2+3) = -\infty$ obtenemos que la respuesta es B).

5.3. Consideremos la función *f*: (0, + ∞) → R definida por $f(x) = \dfrac{x^3+3x-1}{x^2}$. Entonces:

A) El eje *X* es asíntota de la gráfica de *f*.

B) La gráfica de *f* no tiene asíntotas ni verticales ni horizontales.

C) La gráfica de *f* no corta nunca al eje *X*.

D) El eje *Y* es asíntota vertical de la gráfica de *f*.

E) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Analicemos cada opción y vayamos descartando:

A) Calculamos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Así pues, la función no tiene asíntotas horizontales.

B) Observamos que x = 0 es una asíntota vertical de f(x) ya que $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

C) $f(x) = \dfrac{x^3+3x-1}{x^2} = 0$ si $x^3 + 3x – 1 = 0$ y esta ecuación tiene al menos una solución real ya que un polinomio de 3^er grado corta al menos una vez al eje *X*.

D) Es cierta como hemos comprobado en B).

E) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

5.4. Sea *f* la función definida en (–2, +∞) por la fórmula $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$. Entonces:

A) La gráfica de *f* corta al eje de ordenadas en el punto de ordenada $\frac{7}{2}$.

B) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$

C) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 3) = 0$

D) *f*(*x*) > 3 para todo *x* del dominio de *f*.

E) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

A) Es verdadera pues $f(0) = 3 + \frac{1}{0+2} = \frac{7}{2}$.

B) Es falsa, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$.

C) Es cierta, $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 3) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

D) Es verdadera pues $\frac{1}{x+2} > 0$ si $x > -2$.

E) Es falsa pues la función no está definida si $x \leq -2$ y por tanto no podemos calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

5.5. Sea *g* la función definida en (0, +∞) mediante la fórmula $g(x) = \ln \frac{2}{x}$. Entonces:

A) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

B) Si *a* > 1, entonces *g*(*a*) < *g* (2).

C) La gráfica de *g*(*x*) no corta nunca al eje *X*.

D) La gráfica de *g*(*x*) corta dos veces al eje *Y*.

E) El conjunto de números reales soluciones de la inecuación *g*(*x*) ≤ 0 es [2, +∞).

A) Es verdadera pues $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{2}{x} = \lim_{x \to +\infty} (\ln 2 - \ln x) = \ln 2 - \lim_{x \to +\infty} \ln x = -\infty$.

B) Es falsa. *G*(2) = ln 1 = 0 pero g(a) = ln 2 – ln *a* > 0 si 1 < *a* < 2, por ejemplo, *g*(1,5) ≈ 0,29.

C) Es falsa, *g*(2) = 0.

D) Es falsa pues *g*(*x*) = 0 si ln 2 = ln(*x*) cuya única solución es *x* = 2.

E) Es verdadera *g*(*x*) ≤ 0 si ln 2 ≤ ln(*x*) y esto ocurre si 2 ≤ *x*.

5.6. Sea *f* la función $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$.

A) *D*(*f*) = R

B) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

C) *f* es continua en todos los puntos de su dominio.

D) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

E) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$

A) Es falsa. $x^2 - x \geq 0$ si $x \leq 0$ ó $1 \leq x$ luego *D*(*f*) = (– ∞, 0] ∪ [1, + ∞].

B) Es verdadera.

C) Es verdadera pues es suma de dos funciones continuas.

D) Es verdadera: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right) = 2$.

E) Es falsa. $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)} = -\frac{1}{2}$

5.7. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A) Si $f(2) \cdot f(3) < 0$, existe algún número $c \in (2, 3)$ con $f(c) = 0$.

B) Si f es continua en [2, 3] y no se anula en [2, 3], entonces $f(2) \cdot f(3) > 0$.

C) Si f es continua en [2, 3] y se anula alguna vez en ese intervalo, entonces $f(2)$ y $f(3)$ tienen diferente signo.

D) Si f es continua en [2, 3], existe algún número c tal que $2f(c) = f(2) + f(3)$.

E) Si f es continua en [2, 3] y f : [2, 3] → [2, 3], existe algún número c en [2, 3] tal que $\frac{f(c)}{c} = 1$.

A) Es cierto si la función es continua. Un contraejemplo es $f(x) = \begin{cases} -1 & x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$.

B) Es verdadera.

Si $f(2) \cdot f(3)$ fuera negativo, $f(2)$ y $f(3)$ tendrían distinto signo y por el teorema de Bolzano existiría un número c en [2, 3] con f(c) = 0 pero f no se anula en [2, 3].

C) Es falsa.

Un contraejemplo es $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$.

D) Es verdadera.

Si $f(2) = f(3)$ entonces basta tomar $c = 2$. Si $f(2) \ne f(3)$ entonces $f(2) - f(3)$ y $f(3) - f(2)$ tienen distinto signo.

Consideremos la función $g(x) = 2f(x) - f(2) - f(3)$ que es continua en [2, 3] pues f lo es.

$g(2) = f(2) - f(3)$ y $g(3) = f(3) - f(2)$ tienen distinto signo luego, por el teorema de Bolzano existe algún número c en [2, 3] con $g(c) = 2f(c) - f(2) - f(3) = 0$, así pues $2f(c) = f(2) + f(3)$.

E) Es verdadera.

Consideremos en este caso la función $g(x) = f(x) - x$ que es continua en [2, 3].

Si $g(2) = 0$ o $g(3) = 0$ ya estaría demostrado pues tendríamos $f(2) = 2 \Rightarrow \frac{f(2)}{2} = 1$ o $f(3) = 3 \Rightarrow \frac{f(3)}{3} = 1$.

En caso contrario $g(2) = f(2) - 2 > 0$, $g(3) = f(3) - 3 < 0$. Usando el teorema de Bolzano deducimos que existe algún número c en [2, 3] tal que $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c \Rightarrow \frac{f(c)}{c} = 1$.

Otra forma de verlo es gráficamente: como f es continua y va de [2, 3] al [2, 3], a la fuerza, su gráfica corta en algún punto $(c, f(c))$ al segmento que une los puntos (2, 2) y (3, 3), es decir, a la recta $y = x$, por lo que $f(c)=c$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

5.8. Considera la función $f(x) = x \cdot g(x)$:

a) La gráfica de f pasa por el origen de coordenadas.

b) g es continua en 0.

A) b $\Rightarrow$ a , pero a $\not\Rightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b , pero b $\not\Rightarrow$ a

C) a $\Leftrightarrow$ b

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior

La relación correcta es A) Como $g(x)$ es continua en $x = 0$, existe $g(0)$ y $f(0) = 0 \cdot g(0) = 0$. Luego la función pasa por (0, 0). Para ver que b no implica a basta considerar la función $g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$.

Señala el dato innecesario para contestar:

5.9. Para demostrar si $\lim_{x\to 4} f(x) = +\infty$, donde $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-4)^{2d}}$, con *a*, *b*, *c* y *d* enteros positivos y nos dan estos datos:

a) Valor de *a*

b) Valor de *b*

c) Valor de *c*

d) Valor de *d*

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ninguno.

D) Puede eliminarse el valor de *d* pues solo nos interesa el signo de la expresión. Para hallarlo necesitamos saber el signo de $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ $(x-4)^{2d}$ cuando *x* se aproxima a 4. Para saber los tres primeros necesitamos conocer *a*, *b* y *c* pero $(x-4)^{2d}$ es siempre positivo por ser 2*d* par.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar a la cuestión:

5.10. Para decidir si la la gráfica de $y = x^2 + bx + c$ corta al eje horizontal nos dicen que:

a) $c < 0$

b) $b \geq 0$

A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen falta más datos.

B) Debemos saber si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene solución. Como si $c < 0$ entonces $b^2 - 4c > 0$, la ecuación tendrá dos soluciones y por tanto, la función cortará dos veces al eje horizontal. $b \geq 0$ no es suficiente pues por ejemplo, $x^2 + 3x - 4$ corta al eje y $x^2 + 3x + 6$ no.