3 Sistemas de ecuaciones lineales

ACTIVIDADES INICIALES

3.I. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x-2y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ -6x-3y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases}$

a) $x=1, y=3$ b) $x=\lambda, y=-2\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$ c) Sistema incompatible d) $x=0, y=0$

3.II. En cada caso, escribe un sistema de ecuaciones cuya solución sea la señalada.

a) $x=3, y=-2$ b) $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2-\lambda \end{cases}$ c) $x=-4, y=5$ d) $\begin{cases} x=4-3\lambda \\ y=-1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+2y=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=4-3\lambda \\ y=-1, \lambda \in R \end{cases}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Escribe en forma matricial los sistemas (indica también la expresión de las matrices ampliadas).

a) $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x-5y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-2z=4 \\ x-y=0 \\ 3x+3z=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=3 \\ 2x_1-x_2-x_3=2 \\ -x_1-x_4=5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-3y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.2. Escribe de forma desarrollada el sistema: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x-3y+3z=-1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

3.3. Mediante el cálculo de la matriz inversa, resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - 2y - 2z = -4 \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}[\text{Adj}(A)]^t = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}B = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0,\ y = 2$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{-10}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}B = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0,\ y = 1,\ z = 1$

3.4. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \\ 3x + 6z = -9 \end{cases}$**, escribe sistemas equivalentes a él aplicando sucesivamente las siguientes transformaciones:**

i) $E_3 \to \dfrac{1}{3}E_3$ **ii)** $E_1 \leftrightarrow E_3$ **iii)** $E_2 \to E_2 - 2E_1$ **iv)** $E_3 \to E_3 - 4E_1$ **v)** $E_3 \to E_3 - E_2$

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \\ 3x + 6z = -9 \end{cases} \underset{E_3 = \frac{1}{3}E_3}{\rightarrow} \begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \\ x + 2z = -3 \end{cases} \underset{E_1 \Leftrightarrow E_3}{\rightarrow} \begin{cases} x + 2z = -3 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases} \underset{E_2 = E_2 - 2E_1}{\rightarrow} \begin{cases} x + 2z = -3 \\ 2y - z = 2 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

$$\underset{E_3 = E_3 - 4E_1}{\rightarrow} \begin{cases} x + 2z = -3 \\ 2y - z = 2 \\ 2y - 9z = 18 \end{cases} \underset{E_3 = E_3 - E_2}{\rightarrow} \begin{cases} x + 2z = -3 \\ 2y - z = 2 \\ -8z = 16 \end{cases}$$

3.5. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, escribe la matriz de los coeficientes e indica si son o no escalonados.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ y + 3z = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 3y - z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sí es escalonado.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ No es escalonado.

b) Cambiando ecuaciones, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sí es escalonado.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ No es escalonado.

3.6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} 3x+7y=14 \\ -7x+3y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -2x+y+z=7 \\ x-z=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 3x-y-z=2 \\ x-2y=3 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \\ 3x+2y-3z=2 \\ x-z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x-y=\dfrac{1}{2} \\ 3x+4y=-\dfrac{17}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ x+y-z=7 \\ 3x-2y-z=4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ 3x+3y-2z=8 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=7 \\ 2x+5y=15 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ -7 & 3 & 6 \end{array}\right) \underset{F_2=3F_2+7F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ 0 & 58 & 116 \end{array}\right) \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 3x + 7y = 14 \Rightarrow 3x + 14 = 14 \Rightarrow x = 0$. Solución: $x = 0$, $y = 2$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 & -\frac{17}{2} \end{array}\right) \underset{F_2=5F_2-3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 23 & -44 \end{array}\right) \Rightarrow y=-\dfrac{44}{23} \Rightarrow 5x+\dfrac{44}{23}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=-\dfrac{13}{46}$. Solución: $x=-\dfrac{13}{46}$, $y=-\dfrac{44}{23}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{F_3=3F_3+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2=\frac{1}{3}F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones: $\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{F_2\Leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 2 & -17 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+5F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -13 & 13 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución única $x = 3$, $y = 3$, $z = -1$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{F_3\Leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$

No tiene solución.

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 8 \end{array}\right) \underset{F_2=2F_2-3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$ Infinitas soluciones: $\begin{cases} x=\dfrac{4+\lambda}{3} \\ y=\dfrac{4+\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases}$

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Infinitas soluciones: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$

h) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 15 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3=7F_3+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow$ No tiene solución.

3.7. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, comprueba si verifica las condiciones para aplicar directamente la regla de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelos:

a) $\begin{cases} 3x-5y=18 \\ 4x+3y=-5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y-2z=10 \\ 3x-2y-2z=5 \\ 7x-4y-6z=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ 3x+3y-3z=-1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+3y+z=4 \\ 2x+y=5 \\ x+z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x+8y=12 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y-5z=-17 \\ x+3y-2z=-12 \\ 2x-y-z=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=\frac{1}{2} \\ 2x+4y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+2z=-4 \\ y+2z=-4 \\ x+2y=6 \end{cases}$

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $|A|=9+20=29\neq 0$. Se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 18 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}}{29}=\frac{54-25}{29}=\frac{29}{29}=1,\ y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{29}=\frac{-15-72}{29}=\frac{-87}{29}=-3$$

b) $A=\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $|A|=16-16=0$. No se puede aplicar directamente la regla de Cramer.

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ $|A|=24+24+14-28-16-18=0$. No se puede aplicar la regla de Cramer.

d) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $|A|=-9+5-8+30-6+2=14\neq 0$. Se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -17 & 2 & -5 \\ -12 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{14}=\frac{56}{14}=4,\ y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -17 & -5 \\ 1 & -12 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{14}=\frac{-28}{14}=-2,\ z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -17 \\ 1 & 3 & -12 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{14}=\frac{70}{14}=5$$

e) El sistema no es cuadrado. No se puede aplicar la regla de Cramer directamente.

f) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $|A|=4-2=2\neq 0$. Se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 4 \end{vmatrix}}{2}=\frac{7}{6},\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}}{2}=-\frac{2}{3}$$

g) El sistema no es cuadrado. No se puede aplicar la regla de Cramer directamente.

h) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $|A|=-6\neq 0$. Se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-12}{-6}=2,\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-12}{-6}=2,\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{18}{-6}=-3$$

3.8. Analizando los rangos de las matrices del sistema y la matriz ampliada, estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-4y=2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ -3x-2y-z=10 \\ -y+z=44 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 3x+2y-4z=4 \\ 2x-y-z=3 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} 2x+3y-2z+4w=1 \\ x+y-z+w=0 \\ x-w=3 \\ 4x+4y-3z+4w=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-3y=9 \\ -x+y=-3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x-2y-z=3 \\ 4x-y-7z=1 \\ 8x-3y-8z=2 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} -4x-2y+8z=3 \\ 2x+y-4z=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-2y=1 \\ -2x+y=-6 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ 3x+2y+4z=2 \\ 4x+3y+2z=3 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+4y=7 \\ -x+4y=3 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 11 & 1 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCD

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A*) = 1 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -11 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ Incompatible

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ -3 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=3F_1+2F_2 \\ F_3=F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 44 \\ 0 & -1 & 1 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A*)= 2 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -7 & 1 \\ 8 & -3 & -8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=-F_1+F_2 \\ F_3=-2F_1+F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ rg(A) = 2 rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Incompatible

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=-3F_1+2F_2 \\ F_3=-2F_1+F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-3F_2+5F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 2 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A*) = 3 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCD

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=-2F_1+3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A*) = 2 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \Leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=2F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ Incompatible

i) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=3F_1+F_2 \\ F_3=2F_1+F_3}]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & 16 \\ 0 & 9 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=\frac{1}{16}F_2 \\ F_3=\frac{1}{9}F_3}]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCD

j) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=-2F_1+F_2 \\ F_3=-F_1+F_3 \\ F_4=-4F_1+F_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow[F_4=-F_3+F_4]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A*) = 3 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

3.9. Aplicando el método de Gauss, discute y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ x-4y+z=11 \\ x+3y-2z=-9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-3y+2z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ -x-3y+3z=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ x-y-z=-1 \\ 4x-4y-z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+z=4 \\ 2y+z=5 \\ x+y+z=4 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & -2 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3+5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución única: $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -8 \\ 0 & -6 & 5 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=7F_3+6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 29 & 29 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. La solución única es $x = -1$, $y = -1$, $z = 1$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-4F_1]{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones son: $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda, y=\lambda, z=1$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4=F_4-2F_1]{F_3=F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \Leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4=F_4-3F_2]{F_3=F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4=F_4+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Por lo tanto el sistema es compatible determinado. La única solución es $x = -1$, $y = 0$, $z = 5$.

3.10. Aplicando el teorema de Rouché y la regla de Cramer, discute y resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x-y+3z=-14 \\ 3x-y-z=-4 \\ -3x+2y+2z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+3z=-14 \\ 3x-y-z=-4 \\ 4x-y-5z=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+3z=-14 \\ 3x-y-z=-4 \\ -x-y+15z=-40 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 2y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ rg(A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución única: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -14 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{12}=\dfrac{-24}{12}=-2$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -14 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{12}=\dfrac{12}{12}=1$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{12}=\dfrac{-36}{12}=-3$

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ rg(A) = rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Si $z = \lambda$, el sistema equivale: $\begin{cases} 2x-y=-14-3\lambda \\ 3x-y=-4+\lambda \end{cases}$

Soluciones: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -14-3\lambda & -1 \\ -4+\lambda & -1 \end{vmatrix}}{1}=10+4\lambda$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -14-3\lambda \\ 3 & -4+\lambda \end{vmatrix}}{1}=34+11\lambda$.

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 15 & -40 \end{pmatrix}$ rg(A) = 2 rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-9\neq 0$ y $\left|A^*\right|=-9\neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3, rg(A^*) = 4

$\Rightarrow$ Sistema incompatible

3.11. Discute y resuelve, según los distintos valores del parámetro *a*, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + y = a - 1 \\ x + ay = 0 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & a-1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$; $|A| = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = -1$

CASO I. $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 1 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

Sus infinitas soluciones son: $x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x = -\lambda$, $y = \lambda$

CASO II. $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(A) = 1, rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ SI

CASO III. $a \neq 1$ y $a \neq -1$,rg(A) = 2 rg(A^*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCD. La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a}{a+1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(a-1)}{(a-1)(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$$

3.12. a) Calcula el valor de *a* para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y resuélvelo.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 15 \\ x - 2y + z = 11 \\ x - z = a \end{cases}$$

b) ¿Existe algún valor real de a para el cual el sistema anterior sea compatible determinado?

a) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array}\right) \underset{F_1 \Leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & -3 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -2 & a-11 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - 2F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ El sistema será compatible indeterminado cuando el rg(A^*)= rg (A) = 2 $\Rightarrow a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$

Resolviendo por Gauss para $a = -3$, el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 11 \\ \quad y - z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 + 2(-7 + z) - z = -3 + z \\ y = -7 + z \end{cases}$$

Las infinitas soluciones pueden expresarse de la forma: $x = -3 + \lambda,\quad y = -7 + \lambda,\quad z = \lambda$

b) Es imposible ya que el rango de A es siempre 2.

3.13.Estudia la compatibilidad del siguiente sistema según los diferentes valores de *a* y resuélvelo cuando sea posible:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ y + z = 2 \\ 2x + ay + z = 8 \end{cases}$$

Matrices del sistema: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 + 6 - 2 - a = 5 - a$

$|A| = 0 \Rightarrow 5 - a = 0 \Rightarrow a = 5$

CASO I. Cuando $a = 5$. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $|A| = 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 12 - 10 - 10 = 0 \Rightarrow$ rg(A^*) = 2

Entonces: rg(A) = rg(A^*) = 2 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Sus infinitas soluciones son: $x = 2\lambda - 1$, $y = 2 - \lambda$, $z = \lambda$

CASO II. Cuando $a \neq 5$, rg(A) = rg(A^*) = 3 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

Su solución por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{15-3a}{5-a} = 3\,,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{5-a} = 0\,,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & a & 8 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10-2a}{5-a} = 2$$

3.14. Calcula el valor de *a* para que el siguiente sistema tenga una única solución y halla, para este valor, dicha solución:

$$\begin{cases} \mathbf{2x - 4y + z = 10} \\ \mathbf{ax - z = 4} \\ \mathbf{2x + y = a} \\ \mathbf{x - 3y + 2z = 3a} \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado si rg(A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 10 \\ a & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -3 & 2 & 3a \end{vmatrix} = -2a^2 + 12a - 18 = 0 \Rightarrow a = 3$

Para $a = 3$, rg(A) = rg(A^*) = 3 = n.º incógnitas, ya que $|A| = 13 \neq 0$ $\Rightarrow$ La única solución, en este caso, es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{26}{13} = 2\,,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-13}{13} = -1\,,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{13} = \frac{26}{13} = 2$$

3.15. Discute y resuelve, en los casos en que sea posible, los siguientes sistemas homogéneos.

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + 3y + 4z = 0} \\ \mathbf{-2x + y - z = 0} \\ \mathbf{2x + y + z = 0} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 0} \\ \mathbf{2x + 2y + 2z = 0} \\ \mathbf{3x + 3y + 3z = 0} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \mathbf{2x + y - z = 0} \\ \mathbf{2x - y + z = 0} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{x - 2y + z = 0} \\ \mathbf{-x + 2y - 3z = 0} \\ \mathbf{-x + 2y - 5z = 0} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \mathbf{-x - 2y + 3z = 0} \\ \mathbf{2x + 4y - 6z = 0} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 0} \\ \mathbf{-x + 4y = 0} \\ \mathbf{-2x - 3y = 0} \end{cases}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10$ $\Rightarrow$ SCD. Única solución: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ SCI. Si $y = \lambda$, el sistema es equivalente a: $\begin{cases} x + z = 2\lambda \\ x + 3z = 2\lambda \end{cases}$

Sus soluciones: $x = 2\lambda,\ \ y = \lambda,\ \ z = 0$

c) El sistema es equivalente a $\{x + y + z = 0$ $\Rightarrow$ Compatible indeterminado.

Sus infinitas soluciones de deben escribir con la ayuda de dos parámetros: $x = -\lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$

d) Compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones son $x = 0$, $y = \lambda$, $z = \lambda$.

e) El sistema es equivalente a $\{x + 2y - 3z = 0$ $\Rightarrow$ Compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones se deben escribir con la ayuda de dos parámetros: $x = -2\lambda + 3\mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$

f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ rg(A) = 2 $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado. Su única solución es la trivial:

$x = 0$, $y = 0$.

3.16. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos:

a) $A(3, -2)$ $B(2, 4)$

b) $A(2, -5)$ $B(1, -3)$

c) $A(3, -3)$ $B(-3, -3)$

Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + b$.

a) $\begin{cases} 3m + b = -2 \\ 2m + b = 4 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-6}{1} = -6 \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{16}{1} = 16$

Ecuación de la recta: $y = -6x + 16 \Rightarrow 6x + y = 16$

b) $\begin{cases} 2m + b = -5 \\ m + b = -3 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2}{1} = -2 \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-1}{1} = -1$

Ecuación de la recta: $y = -2x - 1 \Rightarrow 2x + y = -1$

c) $\begin{cases} 3m + b = -3 \\ -3m + b = -3 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{6} = 0 \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-18}{6} = -3$

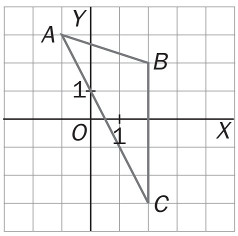
Ecuación de la recta: $y = -3$

3.17. Calcula las ecuaciones de los lados del triángulo de vértices:

***A*(−1, 3) *B*(2, 2) y *C*(2, −3)**

El lado que pasa por A y B: $\begin{cases} -m + b = 3 \\ 2m + b = 2 \end{cases}$

$m = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{-3} \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-8}{-3} = \dfrac{8}{3}$



Ecuación de la recta: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3} \Rightarrow x + 3y - 8 = 0$

El lado que pasa por A y C: $\begin{cases} -m + b = 3 \\ 2m + b = -3 \end{cases}$

$m = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \dfrac{6}{-3} = -2 \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

Ecuación de la recta: $y = -2x + 1 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$

El lado que pasa por B y C: $x = 2$

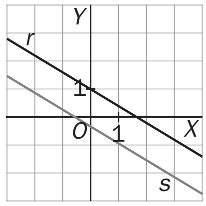
3.18. Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas y represéntalas.

a) $r\!:3x+5y-5=0$ **y** $s\!:9x+15y+5=0$

b) $r\!:3x+5y-5=0$ **y** $s\!:3x-5y+5=0$

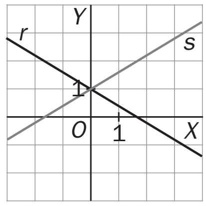
c) $r\!:3x+5y-5=0$ **y** $s\!:-6x-10y+10=0$

Se plantea el sistema formado por las ecuaciones de las rectas y se estudia su compatibilidad.



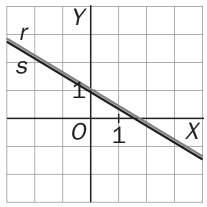
a) $\begin{cases} 3x+5y=5 \\ 9x+15y=-5 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 9 & 15 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -20 \end{array}\right)$

rg(A) = 1 rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Incompatible.
Las rectas son paralelas.



b) $\begin{cases} 3x+5y=5 \\ 3x-5y=-5 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 3 & -5 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 0 & -10 & -10 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible determinado con solución única:x = 0 y = 1. Las rectas son secantes y se cortan en el punto P(0, 1).



c) $\begin{cases} 3x+5y=5 \\ -6x-10y=-10 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ -6 & -10 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A^*) = 1 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible indeterminado
Las rectas son coincidentes.

3.19. Se consideran tres barras de metal compuestas de la siguiente forma:

- **Primera barra: 20 g de oro, 30 g de plata y 50 g de cobre.**
- **Segunda barra: 40 g de oro, 20 g de plata y 90 g de cobre.**
- **Tercera barra: 30 g de oro, 40 de plata y 50 g de cobre.**

¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una de las barras para obtener otra que contenga 43 g de oro, 46 g de plata y 91 g de cobre?

La composición de cada barra es: $\frac{2}{10}$ es oro, $\frac{3}{10}$ es plata y $\frac{5}{10}$ es cobre, en la primera; $\frac{4}{15}$ es oro, $\frac{2}{15}$ es plata y $\frac{9}{15}$ es cobre, en la segunda y $\frac{3}{12}$ es oro, $\frac{4}{12}$ es plata y $\frac{5}{12}$ es cobre, en la tercera.

Si tomamos x gramos de la primera barra, y de la segunda y z de la tercera, el sistema de ecuaciones lineales a resolver es:

$$\begin{cases} \frac{2}{10}x+\frac{4}{15}y+\frac{3}{12}z=43 \\ \frac{3}{10}x+\frac{2}{15}y+\frac{4}{12}z=46 \\ \frac{5}{10}x+\frac{9}{15}y+\frac{5}{12}z=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+16y+15z=2580 \\ 18x+8y+20z=2760 \\ 30x+36y+25z=5460 \end{cases} \Rightarrow x = 60,\ y = 60,\ z = 60$$

Deberán tomar 60 gramos de cada barra.

3.20. En un determinado periodo de tiempo la población de una determinada localidad ha variado. Se conocen los siguientes datos:

- **La población al comienzo del periodo era de 35420 habitantes y al final de 35551.**
- **Nacieron 127 personas más de las que fallecieron.**
- **La diferencia entre las personas que inmigraron y las que emigraron fue de 4.**
- **Entre nacimientos e inmigrantes sumaron 543.**

¿Es suficiente la información para averiguar el número de nacimientos, defunciones, inmigrantes y emigrantes correspondientes a ese período?

La ecuación fundamental de la población es: $Pf = Pi + N - D + I - E$

Con esta ecuación y los datos, se puede escribir el sistema:

$$\begin{cases} 35551 = 35420 + N - D + I - E \\ N - D = 127 \\ I - E = 4 \\ N + I = 543 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N - D + I - E = 131 \\ N - D = 127 \\ I - E = 4 \\ N + I = 543 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 127 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 543 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3+F_2 \\ F_4=F_4-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 412 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 412 \end{array}\right) \underset{F_2 \Leftrightarrow F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 412 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Sistema Compatible indeterminado. No se puede determinar con exactitud el valor de las variables.

EJERCICIOS

Forma matricial de un sistema

3.21. Escribe en forma matricial los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y - z = 4} \\ \mathbf{5x - y + z = 7} \\ \mathbf{2x + 2y - 3z = 9} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1} \\ \mathbf{2x_1 - 2x_3 + x_4 = 0} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{2x - 2z = 0} \\ \mathbf{3x + 3y = 1} \\ \mathbf{4y - 4z = 0} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \mathbf{x + y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 2} \\ \mathbf{x - 3y = -2} \\ \mathbf{x + y = -4} \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3.22. Para cada uno de los siguientes sistemas, escribe la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

a) $\begin{cases} \mathbf{2x+y-z=4} \\ \mathbf{x-y=2} \\ \mathbf{x+2y+2z=0} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathbf{2x+3y-3z=2} \\ \mathbf{x-y-3z=-2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \mathbf{x+y=0} \\ \mathbf{x-3y=2} \\ \mathbf{3x-y=4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \mathbf{x_1+2x_2-3x_3+x_4=2} \\ \mathbf{-x_1-2x_2+4x_3-x_4=-2} \\ \mathbf{x_1+x_2+x_3+x_4=0} \\ \mathbf{-2x_1+3x_2-x_3+2x_4=3} \end{cases}$

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.23. Escribe de forma desarrollada los siguientes sistemas.

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_3} \\ \mathbf{x_4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

a) $\begin{cases} 2x-2y+3z=1 \\ x-2z=2 \\ 2x+2y-z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+2y=\frac{2}{3} \\ -2x+\frac{3}{4}y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=2 \\ -2x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$

Soluciones de un sistema

3.24. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \mathbf{2x+3y-3z=1} \\ \mathbf{-2x+y-4z=5} \\ \mathbf{3x+2y-z=-1} \end{cases}$

escribe sistemas equivalentes a él aplicando sucesivamente las siguientes transformaciones.

i) $\mathbf{E_2=E_2+E_1}$ **ii)** $\mathbf{E_3=2E_3-3E_1}$ **iii)** $\mathbf{E_3=4E_3+5E_2}$

$$\begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ -2x+y-4z=5 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases} \underset{E_2=E_2+E_1}{\rightarrow} \begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ 4y-7z=6 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases} \underset{E_3=2E_3-3E_1}{\rightarrow} \begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ 4y-7z=6 \\ -5y+7z=-5 \end{cases} \underset{E_3=4E_3+5E_2}{\rightarrow} \begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ 4y-7z=6 \\ -7z=10 \end{cases}$$

3.25. Dado el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{3x+2y-4z=a} \\ \mathbf{2x+2y-z=b} \\ \mathbf{3x+y-z=c} \end{cases}$$

calcula el valor de *a*, *b* y *c* para que la terna (2, −1, 4) sea solución del mismo.

$$\begin{cases} 3\cdot 2+2\cdot(-1)-4\cdot 4=a \\ 2\cdot 2+2\cdot(-1)-4=b \\ 3\cdot 2-1-4=c \end{cases} \Rightarrow a=-12,\ b=-2,\ c=1$$

Método de Gauss

3.26. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x+2y=2 \\ 3x-5y=-21 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x-2y=7 \\ -2x+7y=-37 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=2F_2-3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -16 & -48 \end{array}\right) \Rightarrow$ SCD. Solución: $x = -2$, $y = 3$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 7 \\ -2 & 7 & -37 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=3F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 7 \\ 0 & 25 & -125 \end{array}\right) \Rightarrow$ SCD. Solución: $x = 1$, $y = -5$

3.27. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-2y+z=1 \\ 2x+2y-3z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} -x+3y+2z=1 \\ \frac{1}{6}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{2}z=\frac{5}{2} \\ 3x-11y+4z=10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+2y-3z=11 \\ \frac{1}{13}x+\frac{1}{13}y=1 \\ 5x+8y-9z=59 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=-\frac{1}{3}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución: $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 8 \\ 4 & 2 & -6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=\frac{1}{2}F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=3F_3-5F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución: $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-5F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 10 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-4F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 6\lambda$, $y = 2 - 2\lambda$, $z = \lambda$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 5 & -1 & 2 & 11 \\ 6 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-5F_1 \\ F_3=F_3-6F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & 7 & 36 \\ 0 & -11 & 7 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & 7 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-5F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \\ 0 & -18 & 18 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=-\frac{1}{9}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{18}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = -\lambda$, $y = \lambda - 2$, $z = \lambda$

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 \\ 3 & -11 & 4 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+3F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & -2 & 10 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 13 \\ 5 & 8 & -9 & 59 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-5F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SCI. $x = 15 - 3\lambda$, $y = 3\lambda - 2$, $z = \lambda$

3.28. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.

a) $\begin{cases} x+2y+9z=5 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+2y-4z=2 \\ -x-y+2z=1 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & -18 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=-\frac{1}{6}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Soluciones: $x=1-3\lambda$, $y=2-3\lambda$, $z=\lambda$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=2F_2+F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible

3.29. (TIC) Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve los siguientes sistemas de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-3y=-1 \\ x-12y=-11 \\ x+9y=10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x-2y=-1 \\ 2x-4y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -12 & -11 \\ 1 & 9 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3=F_3-2F_2 \\ F_4=F_4+F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=-\frac{1}{7}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución: $x=1$, $y=1$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=2F_4-F_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3=F_3-F_2 \\ F_4=F_4+5F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible

3.30. (TIC) Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

a) $\begin{cases} x+y-2z+2w=-8 \\ x-y-z+w=-2 \\ 2x+3y-z-w=-1 \\ 3x+y+z-3w=10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y-z+w=2 \\ 2x-y-z+2w=4 \\ 2x+3y-z-4w=-2 \\ 3x-z-3w=0 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-2F_1 \\ F_4=F_4-3F_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 15 \\ 0 & -2 & 7 & -9 & 34 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3=2F_3+F_2 \\ F_4=F_4-F_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & 28 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4=7F_4-6F_3]{}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución: $x=1$, $y=-1$, $z=2$, $w=-2$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-2F_1 \\ F_4=F_4-3F_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & 2 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\Leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3=F_3-5F_2 \\ F_4=F_4-6F_2}]{}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & 30 & 30 \\ 0 & 0 & -4 & 30 & 30 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -15 & -15 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Soluciones: $x=\dfrac{7\lambda-5}{2}$, $y=\dfrac{3\lambda-3}{2}$, $z=\dfrac{15\lambda-15}{2}$, $w=\lambda$

Regla de Cramer

3.31. Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 5x-4y=14 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x+2y=-23 \\ -2x+4y=-10 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -x+3y=15 \\ -5x-y=27 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \frac{2}{3}x-3y=\frac{7}{3} \\ \frac{x}{2}-\frac{2}{5}y=\frac{21}{60} \end{cases}$

a) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=2$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=-1$

c) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 27 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}}=-6$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 15 \\ -5 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}}=3$

b) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -23 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}=-3$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -23 \\ -2 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}=-4$

d) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & -3 \\ \frac{21}{60} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}}=\dfrac{7}{74}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{21}{60} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}}=-\dfrac{28}{37}$

3.32. Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas utilizando el método de Cramer.

a) $\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ -2x+y-2z=-10 \\ 3x-2y+5z=22 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y+2z=-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-3y=30-4z \\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+z=5 \\ -3x+y-5z=-33 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x+2y-z=3 \\ 3x-2y-z=2 \\ -x-6y+z=5 \end{cases}$

a) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 14 & -2 & 3 \\ -10 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}=\dfrac{-4}{-4}=1,$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ -2 & -10 & -2 \\ 3 & 22 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}=\dfrac{8}{-4}=-2,$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 14 \\ -2 & 1 & -10 \\ 3 & -2 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}=\dfrac{-12}{-4}=3$

b) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-7}{-7}=1,$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{0}{-7}=0,$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{14}{-7}=-2$

c) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 30 & -3 & 4 \\ 5 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -33 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}=\dfrac{20}{10}=2,$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ -\frac{1}{3} & 5 & 1 \\ -3 & -33 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}=\dfrac{-20}{10}=-2,$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 30 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 5 \\ -3 & 1 & -33 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}=\dfrac{50}{10}=5$

d) Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}=0$, el sistema no es compatible determinado y no se puede resolver por Cramer.

3.33. (TIC)Dado el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+w=4 \\ y+z+w=5 \\ 2x+y+w=5 \end{cases}$$

a) Comprueba que verifica las condiciones para aplicar la regla de Cramer.

b) Calcula su solución.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{2}{1} = 2$, $w = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{2}{1} = 2$

Teorema de Rouché

3.34. Discute con la ayuda del teorema de Rouché y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-24 \\ -4x+3y=20 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x+y=10 \\ 6x-2y=-20 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -2x+5y=4 \\ 4x-10y=-7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ x+y=\dfrac{3}{2} \\ 3x-2y=2 \end{cases}$

a) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -24 \\ -4 & 3 & 20 \end{array}\right)$ rg(A) = 2 = rg(A^*) = n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -24 & -5 \\ 20 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{28}{-14} = -2$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -24 \\ -4 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-56}{-14} = 4$

b) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 10 \\ 6 & -2 & -20 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 = rg(A^*) < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = \lambda$, $y = 10 + 3\lambda$

c) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 5 & 4 \\ 4 & -10 & -7 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & \dfrac{3}{2} \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right)$ rg(A) = 2 = rg(A^*) $\Rightarrow$ SCD. El sistema es equivalente a $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$.

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-10}{-10} = 1$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-5}{-10} = \dfrac{1}{2}$

3.35. Discute con la ayuda del teorema de Rouché y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -17 \\ -5x + 2y - 4z = -17 \\ 4x + y - 5z = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 3 \\ 3x - 3z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -17 \\ -5 & 2 & -4 & -17 \\ 4 & 1 & -5 & 17 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = 51 \neq 0$ rg(A) = 3 = rg(A*) $\Rightarrow$ SCD. Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -17 & -2 & 1 \\ -17 & 2 & -4 \\ 17 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{357}{51} = 7, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -17 & 1 \\ -5 & -17 & -4 \\ 4 & 17 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1139}{51} = \frac{67}{3}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -17 \\ -5 & 2 & -17 \\ 4 & 1 & 17 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{340}{51} = \frac{20}{3}$$

b) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 96 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A*) = 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

c) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & 18 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \\ 4 & 9 & 18 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ rg(A*) = 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. El sistema es equivalente a: $\begin{cases} x + 2y = 4 + 2\lambda \\ 2x + 5y = 10 + 2\lambda \end{cases}$

Solución: $x = 6\lambda$, $y = 2 - 2\lambda$, $z = \lambda$

d) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = -4 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3 = rg(A*) $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$

e) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

f) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = -6 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3 = rg(A*) $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$, $z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

3.36. Discute con la ayuda del teorema de Rouché y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas:

a) $\begin{cases} x+z=4 \\ 2y+z=5 \\ x+y+z=4 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=3 \\ x+3y+2z=6 \\ x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 2y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x+5y+4z=1 \\ 8y+6z=5 \\ 4y+8z=1 \\ x+6y+4z=3 \end{cases}$

a) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow |A^*|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow$ rg (A) = 3 = rg(A^*) $\Rightarrow$ SCD

El sistema es equivalente a : $\begin{cases} x+z=4 \\ 2y+z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

Solución: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{-1}=-1,\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{0}{-1}=0,\quad z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{-5}{-1}=5$

b) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ rg(A) = 2

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 2 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI

El sistema es equivalente a: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=3 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x=\dfrac{3-\lambda}{2}$, $y=\dfrac{3-\lambda}{2}$, $z=\lambda$

c) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-9\neq 0$ y $|A^*|=-9\neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3 y rg(A^*) = 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}=-80\neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3 $\neq$ rg(A^*) = 4 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

3.37. Estudia y resuelve, en su caso, el sistema: $\begin{cases} x+y=4 \\ z+w=3 \\ 2z+w=5 \end{cases}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Un menor de orden 3 extraído de la matriz de coeficientes: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \Rightarrow$

rg(A) = rg(A^*) = 3 < n.º incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Solución: Si $y=\lambda \Rightarrow \begin{cases} x=4-\lambda \\ z+w=3 \\ 2z+w=5 \end{cases} \Rightarrow x = 4 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 2,\ w = 1$

Sistemas con un parámetro

3.38. (PAU) Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro *a* y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 3x-2y=a \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+(3-a)y=26 \\ -3x+(2+a)y=-a-26 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} ax-y=1 \\ -2x+(a-1)y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+(2a+3)y=1 \\ 3ax-y=-1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} ax+y=a \\ a^2x+ay=1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} ax-y=1 \\ x-ay=2a-1 \end{cases}$

a) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & a \end{array}\right)$ $|A|=-4+9=5\neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2 = rg(A*) = n.º incógnitas $\Rightarrow$

Sistema compatible determinado para cualquier valor de a.

Solución: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ a & -2 \end{vmatrix}}{5}=\dfrac{3}{5}a$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & a \end{vmatrix}}{5}=\dfrac{2}{5}a$

b) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2a+3 & 1 \\ 3a & -1 & -1 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ $|A|=-3-6a^2-9a=-6a^2-9a-3=0 \Rightarrow a=-1,\ a=-\dfrac{1}{2}$

CASO I. $a=-1 \Rightarrow (A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: $x=\dfrac{1-\lambda}{3}$, $y=\lambda$

CASO II. $a=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow (A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -1 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = 1 rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a\neq -1$ y $a\neq -\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2a+3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{-2}{6a+3}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3a & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{2a+1}$

c) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3-a & 26 \\ -3 & 2+a & -a-26 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ $|A|=13-a=0 \Rightarrow a=13$

CASO I. a = 13 $(A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -10 & 26 \\ -3 & 15 & -39 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: x = 13 + 5λ, y = λ

CASO II. $a\neq 13$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 26 & 3-a \\ -a-26 & 2+a \end{vmatrix}}{|A|}=a+10$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 26 \\ -3 & -a-26 \end{vmatrix}}{|A|}=2$

d) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{array}\right)$; $|A|=a^2-a^2=0 \Rightarrow$ rg (A) = 1 para cualquier valor de a. $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}=1-a^2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow a=-1,\ a=1$

CASO I. a = 1 $(A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: x = 1 − λ, y = λ.

CASO II. a = −1 $(A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: x =1 + λ, y = λ

CASO III. $a\neq 1$ y $a\neq -1$ rg(A) = 1 ≠ rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

e) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 1 \\ -2 & a-1 & 2 \end{array}\right)$ $\quad |A| = a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \quad a = 2$

CASO I. $a = -1$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 1 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Soluciones: $x = -1 - \lambda$, $y = \lambda$

CASO II. $a = 2$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$ rg(A) = 1 rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq -1$ y $a \neq 2$ rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1}{a-2}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{2}{a-2}$

f) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{array}\right)$; $|A| = -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \quad a = 1$

CASO I. $a = 1$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ rg (A) = rg (A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI . Soluciones: $x = 1 + \lambda$, $y = \lambda$

CASO II. $a = -1$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$ rg (A) = 1 $\neq$ rg (A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq -1$ y $a \neq 1$ rg (A) = rg (A^*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2a-1 & -a \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{1}{a+1}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{2a+1}{a+1}$

3.39. (PAU) Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ 4x - y - 5z = a \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = a \end{cases}$ e) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 - 2a + 2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x + ay - z = 0 \\ ax + y + z = 2a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ -2x + 3y + 4z = 6 \\ (a-3)x + 12y + (a+3)z = 27 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ x + az = a \\ 3x + ay + az = a \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ ax + y + z = -a^2 \\ a^2x + ay + z = -a^3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 2x - y + az = 1 \\ ax - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

a) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & a \end{array}\right)$, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 6$

CASO I. $a = 6$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: $x = 10 + 4\lambda$, $y = 34 + 11\lambda$, $z = \lambda$

CASO II. $a \neq 6$ rg(A) =2 $\neq$ rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

b) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ a-3 & 12 & a+3 & 27 \end{array}\right)$ $\quad |A| = 18a - 36 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

CASO I. $a = 2$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & 12 & 5 & 27 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: $x = \dfrac{11\lambda + 3}{7}$, $y = \dfrac{-2\lambda + 16}{7}$, $z = \lambda$

CASO II. $a \neq 2$ rg(A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 27 & 12 & a+3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1}{6}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \\ -1 & 27 & a+3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{7}{3}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \\ -1 & 12 & 27 \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{1}{6}$

c) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&4\\2&5&-2&10\\4&9&-6&a\end{array}\right)$ $|A|=0$ $\Rightarrow$ rg(A) = 2. Un menor de orden 3 de la matriz ampliada:

$\begin{vmatrix}1&2&4\\2&5&10\\4&9&a\end{vmatrix}=a-18$

CASO I. a = 18 $\Rightarrow$ rg(A) = rg (A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 6\lambda$, $y = 2 - 2\lambda$, $z = \lambda$

CASO II. $a \neq 18$ rg(A) = 2 $\neq$ rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&5\\1&0&a&a\\3&a&a&a\end{array}\right)$ $|A|=5a-a^2=0$ $\Rightarrow$ a = 0, a = 5

CASO I. a = 0 $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&5\\1&0&0&0\\3&0&0&0\end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = 1 = rg(A*) $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 0$, $y = 5 - 3\lambda$, $z = \lambda$

CASO II. a = 5 $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&5\\1&0&5&5\\3&5&5&5\end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = 2 y rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq 0$ y $a \neq 5$ $\Rightarrow$ rg(A) = 3 = rg(A*) $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución: $x=\dfrac{\begin{vmatrix}5&1&3\\a&0&a\\a&a&a\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{2a}{a-5}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&5&3\\1&a&a\\3&a&a\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{-4}{a-5}$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&5\\1&0&a\\3&a&a\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{a-7}{a-5}$

e) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}a&1&1&1\\1&a&1&a\\1&1&a&a^2-2a+2\end{array}\right)$ $|A|=(a+2)(a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=-2$ ó $a=1$

CASO I. a = –2 $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&10\end{array}\right)$ rg(A) = 2 y rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO II. a = 1 Todos los términos de las matrices de coeficientes y ampliada son 1 $\Rightarrow$ rg(A) = 1 = rg(A*) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x=1-\lambda-\mu$ $y=\lambda$ $z=\mu$

CASO III. $a \neq -2$ y $a \neq 1$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución:

$x=\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a&1\\a^2-2a+2&1&a\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1-a}{a+2}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&a^2-2a+2&a\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{3}{a+2}$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&a\\1&1&a^2-2a+2\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{a^2-1}{a+2}$

f) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\a&1&1&-a^2\\a^2&a&1&-a^3\end{array}\right)$ $|A|=(a-1)^2=0 \Leftrightarrow a=1$

CASO I. a = 1 rg(A) = rg(A*) = 1 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x=-1-\lambda-\mu$, $y=\lambda$, $z=\mu$

CASO II. $a \neq 1$ rg (A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema Compatible determinado. Solución:

$x=\dfrac{\begin{vmatrix}-1&1&1\\-a^2&1&1\\-a^3&a&1\end{vmatrix}}{|A|}=-a-1$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\a&-a^2&1\\a^2&-a^3&1\end{vmatrix}}{|A|}=a$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&-1\\a&1&-a^2\\a^2&a&-a^3\end{vmatrix}}{|A|}=0$

g) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&a&1&2\\-1&a&-1&0\\a&1&1&2a\end{array}\right)$ $|A|=2a-2a^2=0$ $\Rightarrow$ a = 0, a = 1

CASO I. a = 1 $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\-1&1&-1&0\\1&1&1&2\end{array}\right)$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 1 - \lambda$, $y = 1$, $z = \lambda$

CASO II. a = 0 $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\-1&0&-1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)$ rg(A) = 2 y rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq 1$ y $a \neq 0$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución: $x=\dfrac{\begin{vmatrix}2&a&1\\0&a&-1\\2a&1&1\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1+2a}{a}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&-1\\a&2a&1\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{a}$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix}1&a&2\\-1&a&0\\a&1&2a\end{vmatrix}}{|A|}=-\dfrac{a+1}{a}$

h) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & a & 1 \\ a & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $|A| = a^3 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1$

CASO I. $a = 1$ $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = \dfrac{2-\lambda}{5}$, $y = \dfrac{-1+3\lambda}{5}$, $z = \lambda$.

CASO II. $a \neq$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{a+2}{a^2+a+6}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{a-2}{a^2+a+6}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{a}{a^2+a+6}$

3.40. (PAU) Estudia los siguientes sistemas homogéneos según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} \mathbf{x + y + 3z = 0} \\ \mathbf{2x + ay + 3z = 0} \\ \mathbf{3x + 2y + 6az = 0} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{5x + 2y - z = 0} \\ \mathbf{x + ay - 3z = 0} \\ \mathbf{3x + 5y - 2z = 0} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y + z = 0} \\ \mathbf{x - ay - 3z = 0} \\ \mathbf{5x + 2y - z = 0} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \mathbf{x - ay + 3z = 0} \\ \mathbf{x + ay - 2z = 0} \\ \mathbf{2x + z = 0} \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & 2 & 6a \end{pmatrix}$ $|A| = 2a^2 - 7a + 5 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{5}{2}$, $a = 1$

CASO I. $a = \dfrac{5}{2}$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = -9\lambda$, $y = 6\lambda$, $z = \lambda$

CASO II. $a = 1$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI Soluciones: $x = 0$, $y = -3\lambda$, $z = \lambda$

CASO III. $a \neq \dfrac{5}{2}$, $a \neq 1$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ SCD. Solución trivial: $x = y = z = 0$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & a & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ $|A| = 56 - 7a = 0 \Rightarrow a = 8$

CASO I. $a = 8$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = \lambda$, $y = 7\lambda$, $z = 19\lambda$

CASO II. $a \neq 8$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ SCD. Solución trivial: $x = y = z = 0$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $|A| = 7a + 56 = 0 \Rightarrow a = -8$

CASO I. $a = -8$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = \lambda$, $y = 7\lambda$, $z = 19\lambda$

CASO II. $a \neq -8$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ SCD. Solución trivial: $x = y = z = 0$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 3 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: $x = -a\lambda$, $y = 5\lambda$, $z = 2a\lambda$

Si $a = 0$ el sistema es de dos ecuaciones con dos incógnitas y, en este caso, es compatible determinado y su solución es la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

3.41. (PAU) Calcula el valor de *m* para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y escribe las infinitas soluciones para este valor hallado. (Aplica el método de Gauss.)

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ 4x - y - 2z = 1 \\ 2x - 4y - z = -3 \\ 2x - my - z = 4 \end{cases}$$

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 2 & -m & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & -m-3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -m-3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado, la última ecuación sea de la forma $0 \cdot y = 0$ y, por tanto, el valor de *m* debe ser *m* = –3.

Para este valor, las infinitas soluciones se pueden expresar mediante las ecuaciones: $x = \dfrac{\lambda+1}{2}$, $y = 1$, $z = \lambda$.

3.42. (PAU) Discute y resuelve según los valores del parámetro *k* el sistema:

$$\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

$(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} k & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right)$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$ rg(*A*) = 2 y $|A^*| = -k^2 - 7k + 8 = 0 \Rightarrow k = 1,\ k = -8$

CASO I. *k* = 1 — rg(*A*) = 2 = rg(A^*) $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Considerando las dos últimas ecuaciones del sistema, la solución es *x* = 1, *y* = 1

CASO II. *k* = −8 — rg(*A*) = 2 = rg(A^*) $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Considerando las dos últimas ecuaciones del sistema, la solución es *x* = 10, *y* = 28

CASO III. *k* ≠ 1 y *k* ≠ −8 — rg(*A*) = 2 ≠ rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

Sistemas homogéneos

3.43. (TIC)Estudia y resuelve los siguientes sistemas homogéneos.

a) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 3y - 4z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = z \\ x - y = z \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 6y - 8z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \\ -4x - 12y + 4z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$

a) $|A| = 16 \Rightarrow$ rg(*A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial: *x* = 0, *y* = 0, *z* = 0

b) $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow$ rg(*A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: *x* = 5λ, *y* = −λ, *z* = 2λ

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ rg(*A*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Soluciones: *x* = λ, *y* = 0, *z* = λ

d) El sistema es equivalente a $\{x + y + z = 0$ rg(*A*) = 1 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: *x* = −λ − μ, *y* = λ, *z* = μ

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ rg(*A*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial: *x* = 0 , *y* = 0, *z* = 0.

f) El sistema es equivalente a $\{x - y + z = 0$ rg(*A*) = 1 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Soluciones: *x* = λ − μ, *y* = λ, *z* = μ

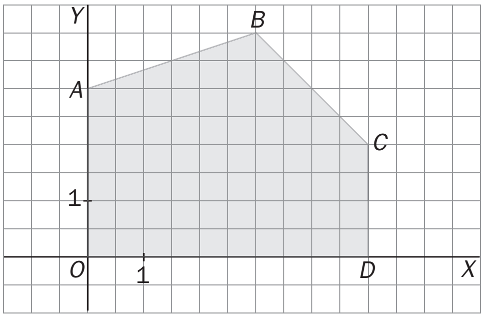
g) $|A| = -18 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible determinado. Solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \Rightarrow$ Sistema Compatible indeterminado.

Soluciones: $z = \lambda,\ w = \mu \Rightarrow \begin{cases} x + y = -\lambda - \mu \\ x - y = -\lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow\ x = -\lambda,\ y = -\mu,\ z = \lambda,\ w = \mu$

Interpretación geométrica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

3.44. Calcula las ecuaciones de las rectas que limitan el recinto sombreado de la figura.



Los vértices son los puntos: $O(0, 0)$ $A(0, 3)$ $B(3, 4)$ $C(5, 2)$ $D(5, 0)$.

Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + b$.

Recta OA: $x = 0$

Recta AB: $\begin{cases} b = 3 \\ 3m + b = 4 \end{cases}$ $\quad m = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x + 3 \Rightarrow x - 3y + 9 = 0$

Recta BC: $\begin{cases} 3m + b = 4 \\ 5m + b = 2 \end{cases}$ $\quad m = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{2}{-2} = -1$, $b = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-14}{-2} = 7 \Rightarrow y = -x + 7 \Rightarrow x + y - 7 = 0$

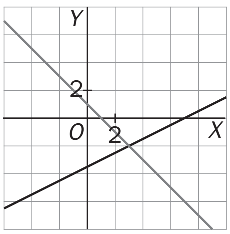
Recta CD: $x = 5$

Recta DO: $y = 0$

3.45. Representa los sistemas propuestos y, a partir de sus gráficas, calcula las soluciones, si es posible.

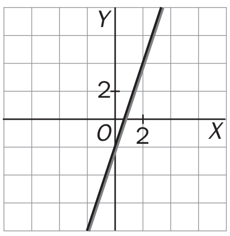
a) $\begin{cases} \mathbf{2x + 2y = 2} \\ \mathbf{-2x + 4y + 14 = 0} \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{3x - y = 2} \\ \mathbf{-6x + 2y = -4} \end{cases}$

a)



La solución es el punto de corte: $x = 3$, $y = -2$.

b)



Como las rectas son coincidentes, las soluciones son todos los puntos de las mismas: $x = \lambda$, $y = -2 + 3\lambda$

3.46. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas.

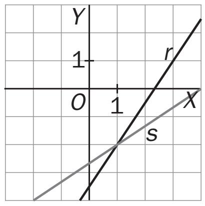
a) $r: 3x-2y=7 \quad s: 2x-3y=8$ **c)** $r: x+y=7 \quad s: -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}=0$

b) $r: 2x-y-5=0 \quad s: -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-5=0$ **d)** $r: y=-2x+3 \quad s: y=\frac{x}{2}$

Representa gráficamente cada apartado.

Se plantea el sistema formado por las ecuaciones de las rectas y se estudia su compatibilidad.

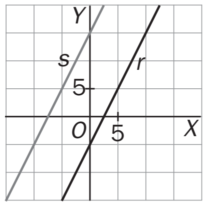
a) $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ 2x-3y=8 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right) \underset{F_2=3F_2-2F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & 10 \end{array}\right)$



rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCD. Solución única: $x = 1$, $y = -2$

Las rectas son secantes y se cortan en el punto $P(1, -2)$.

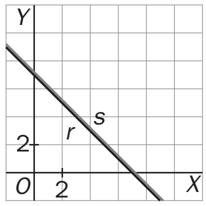
b) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ -2x+y=15 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 15 \end{array}\right) \underset{F_2=F_2+F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$



rg(A) = 1 y rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

Las rectas son paralelas.

c) $\begin{cases} x+y=7 \\ -x-y=-7 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -7 \end{array}\right) \underset{F_2=F_2+F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

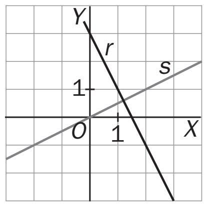


rg(A) = rg(A^*) = 1 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

Infinitas soluciones: los puntos de la recta $x + y = 7$.

Las rectas son coincidentes.

d) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2=2F_2-F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \end{array}\right)$



rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ compatible determinado con solución única: $x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{3}{5}$

Las rectas son secantes y se cortan en el punto $P\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

3.47. Calcula los valores de *k* para que las rectas *r* y *s* de ecuaciones:

***r*: $(2k-2)x-y=-2k$** ***s*: $(k-1)x+(k+1)y=17$**

a) Sean paralelas. **b) Sean secantes.**

a) El sistema $\begin{cases} (2k-2)x-y+2k=0 \\ (k-1)x+(k+1)y-17=0 \end{cases}$ debe ser incompatible. Para ello, rg(A) = 1 $\neq$ rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$

$\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 2k-2 & -1 & -2k \\ k-1 & k+1 & 17 \end{array}\right) \quad |A|=(2k-2)(k+1)+k-1=2k^2+k-3=0 \Rightarrow k = 1,\ k = -\frac{3}{2}$

CASO I. $k = 1$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 17 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 y rg(A^*) = 2. Las rectas son paralelas.

CASO I. $k = -\frac{3}{2}$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & -3 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 17 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 y rg (A^*) = 2. Las rectas son paralelas.

b) Son secantes cuando el sistema es compatible determinado $\Rightarrow$ $k \neq 1$, $k \neq -\frac{3}{2}$, ya que en ese caso rg(A)=2 = rg (A^*).

Problemas

3.48.(PAU) En una clase de segundo de Bachillerato, por cada tres alumnos que estudian Tecnologías de la información, diez estudian Comunicación audiovisual, y por cada dos alumnos que estudian Tecnologías de la información, tres estudian Francés. Calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas.

x : alumnos Tecnología de la información

y : alumnos Comunicación audiovisual

z : alumnos Francés

$$\begin{cases} x+y+z=35 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{10} \\ \dfrac{x}{z}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=35 \\ 10x-3y=0 \\ 3x-2z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 10 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-10F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & -13 & -10 & -350 \\ 0 & -3 & -5 & -105 \end{array}\right) \underset{F_3=13F_3-3F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & -13 & -10 & -350 \\ 0 & 0 & -35 & -315 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 9,\ \ y = 20,\ \ x = 6$

Por tanto, 6 alumnos estudian Tecnología de la información, 20 Comunicación audiovisual y 9 Francés.

3.49. (PAU)En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada.

Los hay de tres tipos:

– Sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros.

– Con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores.

– Con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto.

Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen. ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

x : pantalones sin defecto

y : con defecto no apreciable

z : con defecto apreciable.

$$\begin{cases} x+y+z=70 \\ 20x+16y+8z=1280 \\ y+z=\dfrac{4}{10}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=70 \\ 5x+4y+2z=320 \\ 2x-5y-5z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 5 & 4 & 2 & 320 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-5F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & -7 & -7 & -140 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$x = 50,\ \ y = 15,\ \ z = 5 \Rightarrow$ Hay 50 sin defecto, 15 con defecto no apreciable y 5 con defecto apreciable.

3.50. Escribe la expresión de un polinomio de tercer grado *P*(*x*) de forma que:

$P(0) = 0 \quad P(1) = 0 \quad P(-1) = 2$ y $P(-2) = -6$

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a+b+c+d = 0 \\ -a+b-c+d = 2 \\ -8a+4b-2c+d = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ -a+b-c = 2 \\ 4a-2b+c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = 2 \\ 3a-b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases}$$

El polinomio es: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$

3.51. (PAU) En una papelería entran tres clientes: el primero compra cuatro lapiceros y seis gomas de borrar y paga 1,60 euros; el segundo compra cinco lapiceros y tres bolígrafos y paga 2,45 euros, y el tercero paga 1,30 euros por cinco gomas de borrar y dos bolígrafos.

a) Averigua el precio de cada uno de los productos.

b) ¿Cuánto deberá pagar otro cliente por cinco lapiceros, cinco gomas de borrar y diez bolígrafos?

a) *x* precio de cada lapicero

y precio de cada goma de borrar

z precio de cada bolígrafo

$$\begin{cases} 4x + 6y = 1{,}6 \\ 5x + 3z = 2{,}45 \\ 5y + 2z = 1{,}3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 5 & 0 & 3 & 2{,}45 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \end{array}\right) \underset{F_2=2F_2-5F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & -15 & 6 & 0{,}9 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \end{array}\right) \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \\ 0 & -15 & 6 & 0{,}9 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+3F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \\ 0 & 0 & 12 & 4{,}8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 0{,}25 \quad y = 0{,}1 \; z = 0{,}4 \Rightarrow$ Cada lapicero cuesta 0,25 €; cada goma de borrar, 0,10 € y cada bolígrafo, 0,40 €.

b) El nuevo cliente deberá pagar $5 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}10 + 10 \cdot 0{,}40 = 5{,}75$ €.

3.52. (PAU) Una fábrica de perfumes dispone de 600 L de un producto *A* y de 400 L de otro producto *B*. Mezclando los productos *A* y *B* se obtienen diferentes perfumes. Este año se quieren preparar dos clases de perfume: el de la primera clase llevará tres partes de *A* y una de *B*, y será vendido a 50 euros el L, y el de la segunda clase llevará los productos *A* y *B* al 50% y será vendido a 60 euros el L.

a) ¿Cuántos litros de cada clase de perfume se podrán preparar?

b) ¿Qué ingresos totales se obtendrán por la venta de la totalidad de los productos fabricados?

a) *x* : número de litros que se preparará de la primera clase.

y : número de litros que se preparará de la segunda.

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{y}{2} = 600 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2400 \\ x + 2y = 1600 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2400 \\ 1 & 2 & 1600 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1600 \\ 3 & 2 & 2400 \end{array}\right) \underset{F_2=F_2-3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1600 \\ 0 & -4 & -2400 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 400 \quad y = 600$

Se prepararán 400 L del perfume de la primera clase y 600 del de la segunda.

b) El ingreso total que se obtendrá: $I = 400 \cdot 50 + 600 \cdot 60 = 56000$ €.

3.53. (PAU) En una tienda de regalos se adquiere un libro y una pulsera. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 35 euros, pero el dependiente informa al cliente de que los libros están rebajados el 6%, y las pulseras, el 12%, por lo que en realidad debe pagar 31,40 euros.
a) ¿Qué precio marcaban el libro y la pulsera?
b) ¿Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de estos dos productos?

a) x : precio inicial del libro

y :precio de la pulsera

$$\begin{cases} 0{,}94x + 0{,}88y = 31{,}4 \\ x + y = 35 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}94 & 0{,}88 & 31{,}4 \\ 1 & 1 & 35 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 35 \\ 0{,}94 & 0{,}88 & 31{,}4 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 - 0{,}94F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 35 \\ 0 & -0{,}06 & -1{,}5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 10$, $y = 25$

Por tanto, el libro marcaba 10 € y la pulsera, 25 €.

b) Finalmente, se ha pagado 9,4 € por el libro y 22 € por la pulsera.

3.54. Halla un número de tres cifras sabiendo que su suma es 12, que la cifra de las unidades es igual a la semisuma de las cifras de las centenas y de las decenas, y que, por último, el número que resulta al invertir las cifras del buscado es 198 unidades más pequeño que este.

Llamando x a las centenas, y a las decenas, z a las unidades.

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \\ 100x + 10y + z = 100z + 10y + x + 198 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ -3z = -12 \\ x - z = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 6,\ y = 2,\ z = 4$$

El número buscado es el 624.

3.55. (PAU) Determina la medida de cuatro pesas de una balanza si se sabe que pesadas en grupos de tres dan como resultados respectivos 9, 10, 11 y 12 g.

Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son las medidas de las pesas.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \underset{F_4 \leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 + F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4 = F_4 + F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

$x_1 = 2$ g, $x_2 = 3$ g, $x_3 = 4$ g, $x_4 = 5$ g

3.56. Tres arroyos diferentes surten de agua a un depósito de agua destinada al consumo humano. El primero y el segundo juntos tardan 63 horas en llenarlo; el primero y el tercero juntos, 70 horas, y el segundo y el tercero, 90 horas.
a) Calcula el tiempo que tardará en llenar el estanque cada uno de los arroyos por separado.
b) Calcula el tiempo que tardarán los tres arroyos juntos en llenar el estanque.

a) Si el primero tarda *x* horas, el segundo *y* horas y el tercero *z* horas, en una sola hora cada uno de ellos llenaría $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ y $\frac{1}{z}$ del estanque respectivamente.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{63} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{70} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{90} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{x} \quad b=\frac{1}{y} \quad c=\frac{1}{z} \begin{cases} a+b=\frac{1}{63} \\ a+c=\frac{1}{70} \\ b+c=\frac{1}{90} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{63} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{70} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{90} \end{array}\right) \underset{F_2=F_2-F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{63} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{630} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{90} \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{63} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{630} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{105} \end{array}\right)$$

Por tanto $a=\frac{1}{105}$,$b=\frac{2}{315}$, $c=\frac{1}{210}$ $\Rightarrow$ x = 105 horas, y = 157,5 horas, z = 210 horas

b) Los arroyos tardarán: $\dfrac{1}{\frac{1}{105}+\frac{1}{157{,}5}+\frac{1}{210}} \approx$ 48 horas 28 minutos

3.57. (PAU) Dado el sistema $\begin{cases} \mathbf{2x+y+3z=5} \\ \mathbf{x-2y+z=1} \end{cases}$**:**
a) Añade una tercera ecuación para que sea incompatible.
b) Añade una tercera ecuación para que sea compatible determinado.
c) Añade una tercera ecuación para que sea compatible indeterminado.

a) Se escribe una ecuación cuyo primer miembro sea, por ejemplo, la suma de los de las dos ecuaciones dadas y que el término independiente sea diferente de la suma de los términos independientes de las ecuaciones dadas:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ x-2y+z=1 \\ 3x-y+4z=0 \end{cases}$$

b) Se escribe una ecuación linealmente independiente de las dos dadas: $\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ x-2y+z=1 \\ z=0 \end{cases}$

c) Se escribe una ecuación que sea, por ejemplo, suma de las dos dadas: $\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ x-2y+z=1 \\ 3x-y+4z=6 \end{cases}$

3.58. a) Escribe razonadamente un sistema compatible indeterminado y que tenga cuatro ecuaciones y tres incógnitas.

b) Escribe razonadamente un sistema lineal homogéneo con tres ecuaciones y tres incógnitas y de forma que (−2, 1, 0) sea una solución.

a) Una forma de conseguirlo es escribir dos ecuaciones independientes, la siguiente igual a la suma de las dos primeras y la última igual a la diferencia de las dos primeras. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=2 \\ 3x+2y+z=3 \\ -x+z=-1 \end{cases}$

b) Se escriben dos ecuaciones independientes cuya solución sea (−2, 1, 0) y otra que sea la suma de las dos primeras: $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+2y+z=0 \\ 2x+4y+z=0 \end{cases}$

3.59. Escribe de forma razonada:

a) Un sistema lineal de tres ecuaciones y dos incógnitas con infinitas soluciones.

b) Un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas y una única solución.

c) Un sistema lineal homogéneo con dos ecuaciones y tres incógnitas y cuya única solución sea (0, 0, 0).

d) Un sistema lineal homogéneo con tres ecuaciones y tres incógnitas, y dos de cuyas soluciones sean (−2, 0, 1) y (3, 2, −1).

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$. Las ecuaciones segunda y tercera son proporcionales a la primera.

b) No es posible ya que el rango de *A* no puede ser 3 para que coincida con el número de incógnitas.

c) No es posible ya que debería ser compatible determinado y para ello, el rango de *A* debería ser 3, y en este caso es imposible.

d) $\begin{cases} x=-2\lambda+3\mu \\ y=2\mu \\ z=\lambda-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 3 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+y-4z=0$

El sistema puede ser : $\begin{cases} 2x-y+4z=0 \\ 2x-y+4z=0 \\ 2x-y+4z=0 \end{cases}$

3.60.(PAU) La suma de las edades actuales de tres hermanos es 63 años. Hace dos años, la edad del mediano era 5 años más que un tercio de la suma de las edades de los otros dos, y dentro de cuatro años, el menor tendrá 9 años más que la quinta parte de la suma de los otros dos. Halla las edades actuales de cada uno de los hermanos.

Si las edades actuales son x, y, z:

$$\begin{cases} x+y+z=63 \\ y-2=5+\dfrac{x-2+z-2}{3} \\ z+4=9+\dfrac{x+4+y+4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=63 \\ x-3y+z=-17 \\ x+y-5z=-33 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 1 & -3 & 1 & -17 \\ 1 & 1 & -5 & -33 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & -4 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & -6 & -96 \end{array}\right)$$

$x = 27$, $y = 20$, $z = 16$

Las edades actuales de los tres hermanos son 27, 20 y 16 años.

3.61. (PAU) En una población se han presentado dos partidos políticos *A* y *B,* a las elecciones municipales y se han contabilizado 6464 votos. Si 655 votantes del partido *A* hubiesen votado a *B*, ambos partidos habrían empatado a votos. La suma de votos no válidos y en blanco supone el 1% de los que han votado a *A* o a *B*. Halla el número de votos obtenidos por cada partido.

x : número de votos al partido *A*

y : número de votos al partido *B*

z : número de votos en blanco

$$\begin{cases} x+y+z=6464 \\ x-655=y+655 \Rightarrow 101z=6464 \Rightarrow z=64 \\ 100z=x+y \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=6400 \\ x-y=1310 \end{cases} \Rightarrow x=3855 \text{ , } y=2545$$

El partido *A* ha obtenido 3855 votos y el *B*, 2545.

3.62. (PAU) La producción de bicicletas de montaña precisa las siguientes acciones: montaje de las piezas, ajuste de los cambios y control de calidad. Una empresa produce tres tipos de bicicletas: para niños, para jóvenes y para adultos mayores de 40 años. La siguiente tabla muestra las horas necesarias para llevar a cabo cada una de las acciones en cada una de las clases de bicicleta mencionadas:

	Niño	Joven	Adulto
Montaje	2	4	3
Ajuste	1	2	2
Control	2	1	1

Por otra parte, se cuenta con la siguiente disponibilidad total de horas de trabajo:

Montaje: 510

Ajuste: 270

Control: 180

Comprueba si existe alguna posibilidad de fabricación que consuma todas las horas disponibles.

x : bicicletas de niño

y : de joven

z : de adulto

$$\begin{cases} 2x+4y+3z=510 \\ x+2y+2z=270 \\ 2x+y+z=180 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 510 \\ 1 & 2 & 2 & 270 \\ 2 & 1 & 1 & 180 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 510 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & -3 & -2 & -330 \end{array}\right)$$

$z = 30$, $y = 90$ $\Rightarrow$ $2x + 4y + 3z = 510 \Rightarrow 2x + 360 + 90 = 510 \Rightarrow x = 30$

Fabricando 30 bicicletas de niño, 90 de joven y 30 de adulto mayor de 40 años, se consumen exactamente las horas disponibles.

Profundización

3.63. Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} 2x+2y-3z=6+a \\ y+z=6 \\ 3x+y-z=17 \\ 2y-z=a \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} ax-3y+z=-10 \\ ay+z=3 \\ -3x-3y+z=-10 \\ -3y+z=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2x+ay-z=0 \\ y-z=0 \\ 2x+2ay+z=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x-y+3z=a \\ 2y+3z=7 \\ x-3z=-a \end{cases}$

a) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 6+a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & a \end{array}\right)$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=15$ $|A^*|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 6+a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & a \end{vmatrix}=2(a-6)$

CASO I. $a\neq 6$ rg(A^*) = 4 y rg(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO II. a = 6 rg(A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución: x = 5 , y = 4 , z = 2

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$. Sus dos menores orlados de orden tres son:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2a-4,$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2a & 1 \end{vmatrix}=4a+8$ que son nulos sólo si $a = -2$.

CASO I. $a\neq 2$ rg(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial: $x=0$, $y=0$, $z=0$

CASO II. a = 2 rg(A) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x=3\lambda$, $y=2\lambda$, $z=2\lambda$

c) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} a & -3 & 1 & -10 \\ 0 & a & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $|A^*|=13(a+3)^2=0\Rightarrow a=-3$

CASO I. $a\neq -3\Rightarrow$ rg(A^*) = 4 y rg(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO II. $a = -3$ Como $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=9\neq 0$ y $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} -3 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & -10 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}=0$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Soluciones: $x=\dfrac{13}{3}$, $y=\dfrac{\lambda-3}{3}$, $z=\lambda$

d) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & -a \end{array}\right)$ $|A^*|=14-7a=0\Rightarrow a=2$ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-19\neq 0$

CASO I. $a\neq 2\Rightarrow$ rg(A^*) = 4 y rg(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO II. a = 2 $\Rightarrow$ rg (A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución: x = 1, y = 2, z = 1

3.64. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{5}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Haciendo $A=\dfrac{4}{x}$, $B=\dfrac{5}{y}$ y $C=\dfrac{3}{z}$, se obtiene el sistema: $\begin{cases} A+B=\dfrac{1}{4} \\ A+C=\dfrac{5}{12} \\ B+C=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$$(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \dfrac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & \dfrac{5}{12} \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

Solución: $A=\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{6}$, $B=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{5}{12} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{12}$, $C=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{5}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $x = 24$, $y = 60$, $z = 12$

3.65. Calcula los valores de *a* y *b* para que los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x+ay-3z=-9 \\ x+2y-z=-6 \\ 3x-y-z=b \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} ax-by+3z=14 \\ 2x+y+2z=6 \\ 4x-2y+z=11 \end{cases}$$

sean compatibles y equivalentes.

Se forma un nuevo sistema con las ecuaciones de los dos sistemas que no tienen parámetros:

$$\begin{cases} x+2y-z=-6 \\ 2x+y+2z=6 \\ 4x-2y+z=11 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=25\neq 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

Esta es la solución de los dos sistemas. Por tanto, todas las ecuaciones deben verificarla:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 1+a\cdot(-2)-3\cdot 3=-9 \\ 3\cdot 1-(-2)-3=b \\ a\cdot 1-b\cdot(-2)+3\cdot 3=14 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1,\quad b=2$$

3.66. Encuentra los valores de *a* y *b* que hacen que el siguiente sistema sea incompatible.

$$\begin{cases} 3x-4y+z=a \\ -x+y+z=b \\ 2x-3y+2z=4 \end{cases}$$

El sistema es incompatible si rg(A) ≠ rg(A^*).

$$\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right) \qquad |A|=0 \ \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$$

Por tanto, debe verificarse que $\begin{vmatrix} 3 & -4 & a \\ -1 & 1 & b \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow 12+3a-8b-2a+9b-16\neq 0 \Rightarrow a+b\neq 4$

El sistema es compatible si la suma de los valores de *a* y *b* es distinta de 4.

3.67.Discute el siguiente sistema según los diferentes valores de los parámetros a y b. Resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x+az=1 \\ ay+z=2 \\ y+z=b \end{cases}$$

$$\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \qquad |A|=a-1=0\Rightarrow a=1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix}=ab-2=0$$

CASO I. a = 1, b = 2 $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ rg(A) = rg (A^*) = 2 ⇒ Sistema compatible indeterminado

Soluciones: $x=1-\lambda$, $y=2-\lambda$, $z=\lambda$

CASO II. a = 1, $b\neq 2$ rg(A) = 2 y rg(A^*) = 3 ⇒ Sistema incompatible

CASO III. $a\neq 1$ rg(A) = rg(A^*) = 3 ⇒ Sistema compatible determinado

Solución: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{a^2b-3a+1}{1-a}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=-\dfrac{2-b}{1-a}$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix}}{|A|}=-\dfrac{ab-2}{1-a}$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

3.1. Dadas las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

¿Qué ecuación de las siguientes debe añadirse a estas dos para que el sistema sea incompatible?

A) $4x - 2y + z = -2$

B) $4x - 2y + z = 2$

C) $z = \frac{2}{3}$

D) $x + y + z = 1$

E) $x + y + z = 2$

La respuesta correcta es la B. $4x - 2y + z = 2$, ya que se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tales que el rango de de la matriz de los coeficientes es 2 y el de la ampliada 3, luego el sistema es incompatible.

3.2. El rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas en un sistema de ecuaciones lineales es 2.

El rango de la matriz ampliada:

A) Es seguro que vale 2.

B) Es seguro que vale 3.

C) Puede valer 1 ó 2.

D) Puede valer 2 ó 3.

E) Puede valer 4.

La respuesta correcta es la D. puede valer 2 ó 3, ya que en un sistema de ecuaciones lineales, el rango de la matriz ampliada es siempre o igual o una unidad mayor que el rango de la matriz de coeficientes.

3.3. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 2 \\ 3x + y - z = 4 \end{cases}$

A) Tiene como única solución ($x = 1$, $y = 1$, $z = 0$).

B) Una de sus soluciones es ($x = 2$, $y = 0$, $z = 2$).

C) Sus únicas soluciones son ($x = 1$, $y = 1$, $z = 0$) y ($x = 2$, $y = 0$, $z = 2$).

D) Es incompatible.

E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

La respuesta correcta es la B. una de sus soluciones es ($x = 2$, $y = 0$, $z = 2$), es un SCI porque
rg(A) = rg(B) = 2 < n.ºincóg = 3

3.4. Los valores que hacen que el sistema $\begin{cases} x+ay+z=1 \\ ax-y+2z=2 \\ 2x+3z=3 \end{cases}$ no sea compatible determinado son:

A) $a = \frac{1}{3}$

B) $a = 1$

C) $a = 1$, $a = \frac{1}{3}$

D) $a = -1$

E) $a = -1$, $a = \frac{1}{3}$

La respuesta correcta es la C. $a = 1$, $a = \frac{1}{3}$, porque para que no sea un sistema compatible determinado, el rango de la matriz de los coeficientes ha de ser diferente a 3, es decir, el determinante de A debe ser cero

3.5. El valor de *m* que hace que las rectas del plano *r*: $2x - 3y + 5 = 0$ y *s*: $-3x + my + 5 = 0$ sean paralelas es:

A) $m = 2$

B) $m = -2$

C) $m = 3$

D) $m = -3$

E) $m = \frac{9}{2}$

La respuesta correcta es la E. $m = \frac{9}{2}$, para que las rectas sean paralelas, el sistema debe ser incompatible.

Por tanto, los coeficientes de las incógnitas deben ser proporcionales pero los coeficientes independientes no deben guardar esta proporción.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

3.6. Las infinitas soluciones del sistema $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$ son:

A) $x = 1-\lambda,\ y = -\frac{1}{2},\ z = \lambda$

B) $x = \lambda,\ y = -\frac{1}{2},\ z = 1-\lambda$

C) $x = 1-\lambda,\ y = \lambda,\ z = -\lambda$

D) $x = 1-\lambda,\ y = \frac{1}{2},\ z = \lambda$

E) El sistema no tiene infinitas soluciones

Las respuestas correctas son la A, $x = 1-\lambda,\ y = -\frac{1}{2},\ z = \lambda$, y la B, $x = \lambda,\ y = -\frac{1}{2},\ z = 1-\lambda$.

Al sustituir estos valores se verifican las 2 ecuaciones a la vez.

3.7. En un sistema de *n* ecuaciones lineales con *m* incógnitas:

A) Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema no puede ser incompatible.

B) Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema no puede ser compatible determinado.

C) Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema es compatible indeterminado.

D) Si $n = 2$, $m = 3$ y el sistema es homogéneo, entonces es compatible indeterminado.

E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

Las respuestas correctas son la B. Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema no puede ser compatible determinado, ya que el rango de la matriz de coeficientes no puede ser 3 y la D) si $n = 2$, $m = 3$ y el sistema es homogéneo, entonces es compatible indeterminado ya que posee la solución trivial y ,por tanto, no puede ser incompatible.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

3.8. Se considera un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

a) El rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es 2.

b) El sistema es compatible determinado.

A) a es equivalente a b.

B) a implica b, pero b no implica a.

C) b implica a, pero a no implica b.

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Ninguna de las dos afirmaciones se puede verificar.

La respuesta correcta es la D. *a* y *b* no se pueden dar a la vez. Para que un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas sea compatible determinado, debe verificar como única condición que el rango de la matriz de los coeficientes sea 3.

Señala el dato innecesario para contestar:

3.9. Se quiere resolver el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Para ello se dan los siguientes datos:

a) Las dos primeras ecuaciones son $2x + y - z = 0$ y $3x + y + z = 1$.

b) El sistema tiene una única solución.

c) El determinante de la matriz de los coeficientes vale −3.

d) El determinante cuya primera columna son los coeficientes independientes y cuyas segunda y tercera columnas son los coeficientes de la segunda y tercera incógnita, respectivamente, vale −3.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es la B. Puede eliminarse el dato b, ya que si el determinante de la matriz de coeficientes es –3, el rango de dicha matriz vale 3 y, por tanto, con seguridad el sistema es compatible determinado.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

3.10. Se quiere estudiar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales. Se conoce que:

a) La matriz de los coeficientes del sistema es una matriz escalonada con un número de filas no nulas igual al número de incógnitas del sistema.

b) El rango de la matriz ampliada es igual al número de incógnitas.

A) Tanto la información a como la b son suficientes, por sí solas, para establecer que el sistema es compatible determinado

B) Para establecer que el sistema es compatible determinado, la información a es suficiente por sí sola, pero la b no.

C) Para establecer que el sistema es compatible determinado, la información b es suficiente por sí sola, pero la a no.

D) Son necesarias las dos informaciones juntas.

E) Hacen falta más datos.

La respuesta correcta es la B. Para establecer que el sistema es compatible determinado, la información a es suficiente por sí sola(gracias al método de Gauss), pero la b no, ya que el rango de la matriz de los coeficientes puede ser igual al número de incógnitas disminuido en una unidad.