2 Determinantes

ACTIVIDADES INICIALES

2.I. Busca las relaciones de dependencia lineal entre las filas y columnas de las siguientes matrices e indica el valor de su rango.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -2 & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -2 & -4\\ 2 & 2 & 6\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -2 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\underset{F_2=-\frac{1}{2}F_1}{\rightarrow}\begin{pmatrix}-2 & 4 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -4\\ 2 & 2 & 6\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Como } C_3=2C_2+C_1 \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

2.II. Comprueba que las siguientes matrices son inversas una de la otra.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Se deberían comprobar los dos productos $AB = BA = I$, aunque, en este caso especial de producto de dos matrices que dan como resultado la identidad, solo es necesario comprobar uno de ellos.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I\Rightarrow A^{-1}=B \text{ y } B^{-1}=A$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1. Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix}-a & 2\\ a^2 & 3a\end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix}-3 & -2 & -1\\ -1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ -1 & a & -1\\ a+1 & -1 & a\end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -7$

b) $\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix} = 14$

c) $\begin{vmatrix}-a & 2\\ a^2 & 3a\end{vmatrix} = -3a^2 - 2a^2 = -5a^2$

d) $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix} = 4$

e) $\begin{vmatrix}-3 & -2 & -1\\ -1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix} = 39$

f) $\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ -1 & a & -1\\ a+1 & -1 & a\end{vmatrix} = a^3 + a - a - 1 - a^3 - a^2 - a + a = -a^2 - 1$

2.2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ x+1 & 2x \end{vmatrix} = 11$

c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & x-2 \\ x & x-1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow 3x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ x+1 & 2x \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 11 \Rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \dfrac{-1 \pm 9}{4} \Rightarrow x = 2,\ x = -\dfrac{5}{2}$

c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13 \Rightarrow -x^2 + 2 + 2 = 13 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & x-2 \\ x & x-1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow -2x + 2 + x^2 - 2x + 2 - x^2 + 3x - 2 + 1 - 4x = -7 \Rightarrow -5x + 3 = -7 \Rightarrow x = 2$

2.3. Dado el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, comprueba que se obtiene el mismo valor al desarrollarlo por los elementos de la tercera fila que al desarrollarlo por los elementos de la cuarta columna.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-16) + 1 - 14 - 4 = -49$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 - 4 + 3(-21) = -49$$

2.4. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$ desarrollándolo por los elementos de la línea que creas más conveniente.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 - 5(-25) = 133$$

2.5. Justifica, sin desarrollar, las siguientes igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & -12 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, ya que tiene una fila con todos los elementos nulos.

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0$, ya que las filas primera y tercera son proporcionales: $F_3 = -2F_1$.

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_1=F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$,

ya que las filas primera y tercera son proporcionales: $F_3 = 2F_1$.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & -12 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$,

ya que las columnas segunda y cuarta son proporcionales: $C_4 = -C_2$.

2.6. Comprueba, sin desarrollar, las siguientes igualdades.

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} z-2x & z-2y \\ x & y \end{vmatrix} = z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$

b) $\begin{vmatrix} z-2x & z-2y \\ x & y \end{vmatrix} \underset{F_1=F_1+2F_2}{=} \begin{vmatrix} z & z \\ x & y \end{vmatrix} = z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$

2.7. Comprueba, sin desarrollar, la siguiente igualdad.

$$\begin{vmatrix} a & b & a+b-c & c \\ d & e & d+e-f & f \\ p & q & p+q-r & r \\ s & t & s+t-u & u \end{vmatrix} = 0$$

El determinante es 0, ya que la columna 3 es combinación lineal de las restantes, $C_3 = C_1 + C_2 - C_4$.

2.8. Demuestra que el siguiente determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab & (a-b)^2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab & (a-b)^2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_4=C_4-(C_1+C_2-C_3)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.9. (TIC) Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{F_2=F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3(-3-2-6-3) = 3(-14) = -42$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1=F_1-3F_3 \\ F_2=F_2-3F_3 \\ F_4=F_4-6F_3}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -17 & -10 \\ -1 & 0 & -12 & -14 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -17 & 0 & -27 & -26 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -17 & -10 \\ -1 & -12 & -14 \\ -17 & -27 & -26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -17 & -10 \\ 1 & 12 & 14 \\ -17 & -27 & -26 \end{vmatrix} =$

$\underset{\substack{F_1=F_1+2F_2 \\ F_3=F_3+17F_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 18 \\ 1 & 12 & 14 \\ 0 & 177 & 212 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 18 \\ 177 & 212 \end{vmatrix} = 1702$

2.10. Halla el valor de los siguientes determinantes haciendo previamente ceros.

a) $\begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ x+6 & x+9 & x+12 \\ x+7 & x+10 & x+13 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & b & a^2 \\ b & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ x+6 & x+9 & x+12 \\ x+7 & x+10 & x+13 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3-F_2 \\ F_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & b & a^2 \\ b & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix} \underset{C_3=C_3-aC_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & b & a^2-ab \\ b & a^2 & 0 \\ a^2 & a^3 & 0 \end{vmatrix} = (a^2-ab)\begin{vmatrix} b & a^2 \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} \underset{C_2=C_2-aC_1}{=} (a^2-ab)\begin{vmatrix} b & a^2-ab \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} = -a^2(a^2-ab)^2 =$

$= -a^2[a(a-b)]^2 = -a^4(a-b)^2$

2.11. Calcula el valor de los siguientes determinantes por el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-2F_1 \\ F_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3 \Leftrightarrow F_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 24$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-4F_1 \\ F_4=F_4+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$

2.12. Transforma los siguientes determinantes en sus equivalentes triangulares y calcula su valor.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+y & x & x \\ x & x+z & x \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+y & x & x \\ x & x+z & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+y & x \\ x & x & x+z \\ x & x & x \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} x & x+y & x \\ 0 & -y & z \\ 0 & -y & 0 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} x & x+y & x \\ 0 & -y & z \\ 0 & 0 & -z \end{vmatrix} = xyz$

2.13. **En la matriz** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **se consideran los menores determinados por:**

M_1: filas 1.ª y 2.ª, columnas 1.ª y 2.ª

M_2: filas 1.ª y 2.ª, columnas 2.ª y 3.ª

M_3: filas 2.ª y 4.ª, columnas 2.ª y 4.ª

a) Escribe y calcula dichos menores.

b) Escribe todos los menores de orden tres a partir de los anteriores.

a) $M_1=\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=-16$ $\quad M_2=\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}=-2$ $\quad M_3=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=-2$

b) Menores de $M_1=\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

Menores de $M_2=\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Menores de $M_3=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

2.14. **Calcula el rango de las siguientes matrices.**

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$|A|=2+12-20+2=-4\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=3$

$\text{rg}(D) \underset{F_2\to 2F_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(D)=2$

2.15. **Estudia el rango de la matriz según los diferentes valores del parámetro** λ **:** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A|=(\lambda+1)(\lambda+2-1)=(\lambda+1)^2; (\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda=-1$

Si $\lambda\neq -1 \Rightarrow \text{rg}(A)=3$

Si $\lambda=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg(A)}=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=1$

2.16. **Calcula las matrices inversas de:**

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}[\text{Adj}(A)]^t=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}[\text{Adj}(C)]^t=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}[\text{Adj}(B)]^t=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2.17. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[\text{Adj}(A)]^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -6 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 4 \\ -5 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}[\text{Adj}(B)]^t = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.18. Calcula los valores de *a* para los cuales la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}-\mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$ posee inversa y halla dicha matriz inversa para a = −2.

$\begin{vmatrix} -2 & a \\ a-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$, $a = -1$.

Si $a \neq 2$ y $a \neq -1 \Rightarrow A$ tiene inversa.

Si $a = -2 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2.19. (PAU) Halla los valores de *k* para los cuales la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{k} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{k}-\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{k}-\mathbf{2} & -\mathbf{2} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$ no posee inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1-4k+4+k^2-2k-2k+4+2+k^2-k = 2k^2-9k+9 = 0 \Rightarrow k = 3,\ k = \frac{3}{2}$$

La matriz tiene inversa para todos los valores de *k* salvo para *k* = 3 y $k = \frac{3}{2}$.

2.20. Suponiendo que todas las matrices que aparecen son cuadradas del mismo orden y que las matrices *A* y *B* poseen inversa, despeja la matriz *X* en las siguientes expresiones.

a) $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{AB}$ **c)** $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ **e)** $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{A}^2$ **g)** $\boldsymbol{XAB} + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$

b) $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{AB}$ **d)** $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{B}$ **f)** $\boldsymbol{XA}^t + \boldsymbol{B}^t = (\boldsymbol{AB})^t$

a) $XA = AB \Rightarrow XAA^{-1} = ABA^{-1} \Rightarrow XI = ABA^{-1} \Rightarrow X = ABA^{-1}$

b) $AX = AB \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}AB \Rightarrow IX = IB \Rightarrow X = B$

c) $AX + AB = C \Rightarrow X = A^{-1}(C - AB)$

d) $AXA = B \Rightarrow A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}BA^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}BA^{-1}$

e) $AXB = A^2 \Rightarrow X = A^{-1}A^2B^{-1} = AB^{-1}$

f) $XA^t + B^t = (AB)^t \Rightarrow X = \left[(AB)^t - B^t\right]\left(A^t\right)^{-1}$

g) $XAB + AB = BA \Rightarrow XABB^{-1}A^{-1} = (BA - AB)B^{-1}A^{-1} \Rightarrow X = (BA - AB)B^{-1}A^{-1}$

2.21. (PAU) Calcula todas las matrices *X* tales que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b = 0 \\ c = a + d \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix}$$

2.22. (PAU) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$:

Calcula la matriz *X* tal que $XA - 3B = 4C$.

$$X = (4C + 3B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 15 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{7} & -\frac{5}{7} \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

Determinantes de orden 2 y 3

2.23. Calcula el valor de los siguientes determinantes de orden 2.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 2^3 & 2^{-2} \\ 2^4 & 2^{-4} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^4 & a^5 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -2$ c) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 16 + 9 = 25$ e) $\begin{vmatrix} 2^3 & 2^{-2} \\ 2^4 & 2^{-4} \end{vmatrix} = 2^3 \cdot 2^{-4} - 2^4 \cdot 2^{-2} = -\frac{7}{2}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 18 = -25$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 10 = 18$ f) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^4 & a^5 \end{vmatrix} = a \cdot a^5 - a^2 \cdot a^4 = 0$

2.24. Calcula el valor de los siguientes determinantes de orden 3.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 9 \\ 10 & -10 & 19 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 1 \\ a & 1 & a+b \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 0 & \log 2 & \log 4 \\ \log 2 & \log 4 & \log 8 \\ \log 4 & \log 8 & \log 16 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - (105 + 48 + 72) = 0$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -45 - 96 - 84 - (-105 - 48 - 72) = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -58$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 9 \\ 10 & -10 & 19 \end{vmatrix} = 95 - 240 + 450 - (-400 + 90 + 285) = 330$

e) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -16 + 9 - 24 + 10 = -21$

f) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 1 \\ a & 1 & a+b \end{vmatrix} = ab^2 - a$

g) $\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = 2a^3 - 6a^2 + 8$

h) $\begin{vmatrix} 0 & \log 2 & 2\log 2 \\ \log 2 & 2\log 2 & 3\log 2 \\ 2\log 2 & 3\log 2 & 4\log 2 \end{vmatrix} = 6(\log 2)^3 + 6(\log 2)^3 - 8(\log 2)^3 - 4(\log 2)^3 = 0$

2.25. Calcula el valor de la expresión: $\mathbf{3\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$

$3\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3(-10 - 32) - 4(-10 - 24) + 5(20 - 15) = 35$

2.26. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix} = 2$ **c)** $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 2x & -8x \end{vmatrix} = -20$ **d)** $\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 5-x & 11+x \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix} = 4 - x - 12 = 2 \Rightarrow x = -10$

c) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 2x & -8x \end{vmatrix} = -8x^2 + 6x = -20 \Rightarrow 8x^2 - 6x - 20 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm 26}{16} \Rightarrow x = 2 \,, x = -\dfrac{5}{4}$

d) $\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 5-x & 11+x \end{vmatrix} = 22 + 2x - 11x - x^2 - 15 + 3x = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 1,\ x = -7$

2.27. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 48$ **c)** $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 3 & x & 1 \\ x+1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 30$ **d)** $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ -2 & x & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2x = -6$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 2x - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{7}$

b) $\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 15x + 24x - 12x - 15x - 12x + 24x = 48 \Rightarrow x = 2$

c) $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 3 & x & 1 \\ x+1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2x^2 + 3 + 3x + 3 + x^2 + x + x + 18 = 30 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3, x = 2$

d) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ -2 & x & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2x = 3x^2 - 4x - 8 - 2x - 2 - x^2 - 2x + 4x + 6x + 6 + 2x = -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow 2(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Determinantes de orden superior

2.28. Desarrolla el siguiente determinante por los elementos de su tercera columna y calcula su valor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-18) = -42$$

2.29. Desarrolla los siguientes determinantes por los elementos de la fila o columna que más ceros posea y calcula su valor.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

a) Desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 48 = 34$$

b) Desarrollando por los elementos de la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$$

Propiedades de los determinantes

2.30. Se sabe que $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -2$ **. Calcula el valor de:**

a) $\begin{vmatrix} x & 2x+y \\ a & 2a+b \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 10a & 100x \\ 10b & 100y \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -x & -y \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x & 2x+y \\ a & 2a+b \end{vmatrix} \underset{C_2=C_2-2C_1}{=} \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -2$

b) $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -(-2) = 2$

c) $\begin{vmatrix} 10a & 100x \\ 10b & 100y \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} a & 100x \\ b & 100y \end{vmatrix} = 10 \cdot 100\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 1000\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -1000\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -1000(-2) = 2000$

d) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -x & -y \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -6$

2.31. Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$**. Calcula el valor de:**

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+2a & y+2b & z+2c \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a+x & x+p & 2p \\ b+y & y+q & 2q \\ c+z & z+r & 2r \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -4\cdot 6 = -24$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+2a & y+2b & z+2c \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix} \underset{F_2=F_2-2F_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-F_1-F_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

c) $\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{F_1\Leftrightarrow F_3}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{F2\Leftrightarrow F_3}{=} -\left[-\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

d) $\begin{vmatrix} a+x & x+p & 2p \\ b+y & y+q & 2q \\ c+z & z+r & 2r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+x & x+p & p \\ b+y & y+q & q \\ c+z & z+r & r \end{vmatrix} \underset{C_2=C_2-C_3}{=} 2\begin{vmatrix} a+x & x & p \\ b+y & y & q \\ c+z & z & r \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1-C_2}{=} 2\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 12$

2.32. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = n$**, calcula el valor de** $\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix}$**.**

$\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = 2\cdot 3\begin{vmatrix} 3d & 2e & f \\ 3g & 2h & i \\ 3a & 2b & c \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -36\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$

2.33. Se sabe que $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$**. Calcula el valor de:**

a) $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} m+1 & n+1 & p+1 \\ m & n & p \\ m-1 & n-2 & p-3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot 3\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-F_1}{=} \frac{1}{3}\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}$

b) $\begin{vmatrix} m+1 & n+1 & p+1 \\ m & n & p \\ m-1 & n-2 & p-3 \end{vmatrix} \underset{F_1\Leftrightarrow F_2}{=} -\begin{vmatrix} m & n & p \\ m+1 & n+1 & p+1 \\ m-1 & n-2 & p-3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{=} -\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}$

2.34. Calcula el valor de la suma de determinantes: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a^2+b^2} & \boldsymbol{x^2+y^2} & \boldsymbol{p^2+q^2} \\ \boldsymbol{(a+b)^2} & \boldsymbol{(x+y)^2} & \boldsymbol{(p+q)^2} \\ \boldsymbol{2a+b} & \boldsymbol{2x+y} & \boldsymbol{2p+q} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{2ab} & \boldsymbol{2xy} & \boldsymbol{2pq} \\ \boldsymbol{(a+b)^2} & \boldsymbol{(x+y)^2} & \boldsymbol{(p+q)^2} \\ \boldsymbol{2a+b} & \boldsymbol{2x+y} & \boldsymbol{2p+q} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & x^2+y^2 & p^2+q^2 \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2ab & 2xy & 2pq \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+2ab & x^2+y^2+2xy & p^2+q^2+2pq \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} = 0$$

2.35. Prueba, sin necesidad de desarrollar, que el valor del siguiente determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{9} & \mathbf{11} & \mathbf{13} & \mathbf{15} \\ \mathbf{17} & \mathbf{19} & \mathbf{21} & \mathbf{23} \\ \mathbf{25} & \mathbf{27} & \mathbf{29} & \mathbf{31} \end{vmatrix}$$

$F_4 = -F_1 + F_2 + F_3 \Rightarrow$ Las filas son linealmente dependientes y el determinante vale 0.

Simplificación de determinantes

2.36. Haz ceros en una de las filas o columnas de los siguientes determinantes y calcula su valor.

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{9} \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{11} \\ \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{11} & \mathbf{13} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_4=F_4-2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5-12+4-6+4+10) = -10$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{C_2=C_2-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3+F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12-6 = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_4=F_4-F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-2+4-1+8-2) = -9$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3-F_2 \\ F_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = 0$

2.37. Calcula los siguientes determinantes por el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_2 \Leftrightarrow C_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_3 \Leftrightarrow C_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3-3F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3+9F_2 \\ F_4=F_4+3F_2}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_4=F_4-\frac{1}{2}F_3}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = -72$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_4=F_4-F_3 \\ F_3=F_3-F_2 \\ F_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3-F_2 \\ F_4=F_4-5F_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 32 \end{vmatrix} \underset{F_4=F_4+2F_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 160$$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_2 \Leftrightarrow F_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3+\frac{1}{2}F_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

Rango de una matriz

2.38. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Escribe todos los menores de orden 3 a partir del menor de orden 2 determinado por las filas 1.ª y 3.ª y las columnas 2.ª y 4.ª

Escribe todos los menores de orden 4 a partir del menor de orden 3 determinado por las filas 1.ª, 2.ª y 3.ª, y las columnas 2.ª, 3.ª y 4.ª

El menor de orden 2 indicado es $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$.

Los menores de orden 3 construidos a partir de este menor de orden 2 son:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

El menor de orden 3 indicado es $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Los menores de orden 4 construidos a partir de este menor de orden 3 son:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

2.39. (TIC) Calcula el rango de las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0,5 & 1 & -1,5 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 8 & 6 & -8 \end{pmatrix} \quad J=\begin{pmatrix} -2 & 1 & b \\ 4 & b & 1 \\ -6 & 3 & -b \end{pmatrix}$$

a) $|A|=\begin{vmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow \text{rg}(A)=1$

b) $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0,5 & 1 & -1,5 \end{vmatrix}=-3-12-1+3+1+12=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2-8=-6\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B)=2$

c) $|C|=-28\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(C)=3$

d) $|D|=0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-10\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(D)=2$

e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=36\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(E)=3$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(F)=2$

g) $F_3=F_1+F_2$ y $C_1=C_5 \Rightarrow \text{rg}(G)=\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

En esta última matriz se observa que $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7\neq 0$ y que $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(G)=2$

h) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=4-10=-6\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(H)\geq 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -10 & 8 & 6 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ -10 & 8 & -8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(H)=2$

i) $|I|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{vmatrix}=4a^2-9a+5 \Rightarrow$ Si $a\neq \frac{5}{4}$ y $a\neq 1 \Rightarrow \text{rg}(I)=3$

Si $a=1$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(I)=2$. Si $a=\frac{5}{4}$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(I)=2$

j) $|J|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & b \\ 4 & b & 1 \\ -6 & 3 & -b \end{vmatrix}=8b^2+16b=8b(b+2) \Rightarrow$ Si $b\neq 0$ y $b\neq -2 \Rightarrow \text{rg}(J)=3$

Si $b=0$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(J)=2$. Si $b=-2$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(J)=2$

Matriz inversa

2.40. Calcula las matrices adjuntas de las siguientes y halla, para cada caso, $A \cdot (\mathrm{Adj}(A))^t$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 3 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

a) $\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ $\qquad A\cdot(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26 & 0\\ 0 & -26\end{pmatrix}$

b) $\mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix}-4 & -4 & -2\\ -2 & -2 & 2\\ -6 & -3 & -3\end{pmatrix}$ $\qquad B\cdot(\mathrm{Adj}(B))^t=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -2 & -6\\ -4 & -2 & -3\\ -2 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$

c) $\mathrm{Adj}(C)=\begin{pmatrix}-5 & -5 & 5\\ -25 & -25 & 25\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}$ $\qquad C\cdot(\mathrm{Adj}(C))^t=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & -25 & 5\\ -5 & -25 & 5\\ 5 & 25 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

d) $\mathrm{Adj}(D)=\begin{pmatrix}24 & 24 & 24 & 24\\ -12 & -12 & -12 & -12\\ -8 & -8 & -8 & -8\\ 6 & 6 & 6 & 6\end{pmatrix}$ $\qquad D\cdot(\mathrm{Adj}(D))^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 3 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}24 & -12 & -8 & 6\\ 24 & -12 & -8 & 6\\ 24 & -12 & -8 & 6\\ 24 & -12 & -8 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2.41. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -7\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}a+1 & 1\\ a & 1\end{pmatrix}$$

a) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}\ A)^t=-1\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}(\mathrm{Adj}\ C)^t=\dfrac{1}{\frac{5}{8}}\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{16}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$

b) $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}(\mathrm{Adj}\ B)^t=\dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & 1\\ -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$ $\qquad$ d) $D^{-1}=\dfrac{1}{|D|}(\mathrm{Adj}\ D)^t=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & -a\\ -1 & a+1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -a & a+1\end{pmatrix}$

2.42. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -13\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$$

a) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot(\mathrm{Adj}\ A)^t=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}11 & 28 & 6\\ -7 & -19 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}11 & -7 & 2\\ 28 & -19 & 5\\ 6 & -4 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $C^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 8 & -3\\ -2 & -8 & 4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 4 & -4\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$

b) $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\cdot(\mathrm{Adj}\ D)^t=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 6 & 4 & 2\\ -3 & 7 & -1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18}\end{pmatrix}$ $\qquad$ d) $D^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1-a & -1\\ -a & a^2 & 1+a\\ 1 & -a & -1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & -a & 1\\ 1-a & a^2 & -a\\ -1 & 1+a & -1\end{pmatrix}$

2.43. (TIC) Calcula la matriz inversa de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(\text{Adj } A)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones matriciales

2.44. Despeja X en las siguientes ecuaciones suponiendo que las matrices que intervienen son todas cuadradas del mismo orden y poseen matriz inversa.

a) $AX+BX=AB$

b) $AXB+C=D$

c) $XA^2=BA$

d) A(X + B) = CX

a) $AX+BX=AB \Rightarrow (A+B)X=AB \Rightarrow (A+B)^{-1}(A+B)X=(A+B)^{-1}AB \Rightarrow X=(A+B)^{-1}AB$

b) $AXB+C=D \Rightarrow AXB=D-C \Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}(D-C)B^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}(D-C)B^{-1}$

c) $XA^2=BA \Rightarrow X=BAA^{-1}A^{-1}=BA^{-1}$

d) $A(X+B)=CX \Rightarrow AX+AB=CX \Rightarrow AX-CX=-AB \Rightarrow (A-C)X=-AB \Rightarrow X=-(A-C)^{-1}AB$

2.45. (PAU) Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{X}-\mathbf{2}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}=\mathbf{6}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\left[6\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2.46. (PAU) Dadas las matrices

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ **se considera la ecuación *AX* = *B*.**

a) ¿Cuál debe ser la dimensión de *X*?

b) ¿Crees que sería correcto escribir $X = A^{-1}B$?

c) Encuentra todas las posibles matrices *X* que verifiquen la ecuación.

a) *X* debe ser una matriz cuadrada de orden 2.

b) No es correcto, ya que al no ser cuadrada, *A* no posee inversa.

c) $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=2 \\ 2b+d=1 \\ a=1 \quad b=1 \\ c=0 \quad d=-1 \end{cases}$

Por tanto, la única matriz solución de la ecuación es $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.47. (PAU) Resuelve la ecuación matricial: $X\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.48. (PAU) Resuelve la ecuación matricial $AX - B = C$

siendo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}(C+B) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{2} & -2 \\ -1 & -\frac{7}{2} & -2 \\ -1 & \frac{13}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

2.49. (PAU) Resuelve la ecuación matricial $XA + B = C$

siendo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$X = (C-B)\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -9 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & -\frac{9}{2} & -4 \\ -15 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

2.50. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Resuelve la ecuación $AX = B$.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.51. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 22 & -14 \end{pmatrix}$**.Resuelve la ecuación $ABXBA = C$.**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{Adj } B)^t = 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1}ABXBAA^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1} \Rightarrow B^{-1}IBXBIB^{-1} = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1}$$

$$\Rightarrow B^{-1}BXBB^{-1} = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1} \Rightarrow IXI = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 22 & -14 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 22 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 22 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 45 & -40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 50 & 50 \\ 50 & -75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2.52. (PAU) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Se considera la ecuación *AX* = *B*.

a) ¿Es correcto escribir $X = A^{-1}B$?

b) ¿Cuál debe ser la dimensión de *X*?

c) Calcula todas las matrices *X* soluciones de la ecuación.

a) No existe A^{-1}, ya que $|A| = 0$. Por tanto, la expresión no es correcta.

b) La dimensión de *X* debe ser 3×1.

c) Se utiliza el método directo para calcular *X*:

$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a+2c\\b\\a+b+2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a+2c=-4\\b=2\\a+b+2c=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-4-2c\\b=2\end{cases}$$

Todas las matrices del tipo $X=\begin{pmatrix}-4-2c\\2\\c\end{pmatrix}$ verifican la ecuación.

PROBLEMAS

2.53. Dada la matriz regular *A* de orden tres, con $|A| = 5$, calcula el valor del determinante de su inversa y el valor del determinante de su adjunta.

$$\left|A\cdot A^{-1}\right| = |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |I| = 1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$$

$$|A\cdot(\mathrm{Adj}(A))| = |A|\cdot|\mathrm{Adj}(A)| = |A|^3 = 125 \Rightarrow |\mathrm{Adj}(A)| = \frac{125}{|A|} = \frac{125}{5} = 25$$

2.54. Estudia, según los valores del parámetro *a*, el rango de las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-3&2&3\\2&a&-5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1&2&a\\2&4&a\\a&6&9\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&a&2\\1&-a&a-4\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}1&1&a\\2&2a&2a\\3&3&a+2\end{pmatrix}$$

a) $|A| = -10-6a+6-8-3a-15 = -9a-27 = 0 \Rightarrow a = -3$

$\begin{vmatrix}1&1\\-3&2\end{vmatrix} = 5 \neq 0$

Si $a = -3 \Rightarrow$ rg(*A*) = 2

Si $a \neq -3 \Rightarrow$ rg(*A*) = 3

b) $|B| = 36+12a+2a^2-4a^2-6a-36 = -2a^2+6a = -2a(a-3) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad a = 3$

Si $a = 0 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&6&9\end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(*B*) = 2, ya que $\begin{vmatrix}2&4\\0&6\end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Si $a = 3 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&3\\3&6&9\end{pmatrix} \Rightarrow$rg(*B*) = 2, ya que $\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix} = -6 \neq 0$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -3 \Rightarrow$ rg(*B*) = 3

c) $|C| = a^2 - 4a - a + 4 - a + 2a - 2a + 8 = a^2 - 6a + 12 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-48}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ No existe ningún valor real de a que anule el determinante de $C \Rightarrow$ rg(C) = 3 en todos los casos.

d) $|D| = 2a^2 + 4a + 6a + 6a - 6a^2 - 6a - 2a - 4 = -4a^2 + 8a - 4 = -4(a^2 - 2a + 1) = -4(a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$

Si a = 1 $\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(D) = 1, ya que las tres filas son proporcionales.

Si $a \neq 1 \Rightarrow$ rg(D) = 3

2.55. (PAU) Estudia, según los valores de *m*, el rango de la siguiente matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} m & 1 & -2 \\ 2m & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2m \end{pmatrix}}$**.**

$|A| = -4m^2 - 4m - 4 + 4 + 4m + 4m^2 = 0$ en todos los casos. Por tanto, rg(A) ≤ 2

Como $F_2 = 2F_1 \Rightarrow$ rg(A) = rg$\begin{pmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2m \end{pmatrix}$

Si m = 1 $\Rightarrow$ rg(A) = rg$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ = 1

Si $m \neq 1 \Rightarrow$ rg(A) = 2

2.56. Estudia, según los valores de λ, el rango de las siguientes matrices.

$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & \lambda \end{pmatrix}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}}$

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$

Obtenemos los menores de orden 3 a partir de este determinante de orden 2:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -6\lambda + 6 = -6(\lambda - 1) \\ \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = 3 \cdot (\lambda - 1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \\ \text{Si } \lambda \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \end{cases}$$

b) rg(B) = rg$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ porque $C_4 = 2C_3$

$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow$ rg(B) = rg$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(B) = 1

Si $\lambda = -2 \Rightarrow$ rg(B) = rg$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(B) = 2

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Rightarrow$ rg(B) = 3

2.57. (PAU) Estudia, según los valores de *k*, el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-k \\ 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se considera el menor de orden 3: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-k \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$ en todos los casos.

Por tanto, rg(A) = 3 para cualquier valor de k

2.58. (PAU) Calcula los valores del parámetro λ para los cuales la siguiente matriz cuadrada tiene inversa. Calcula el valor de dicha matriz inversa para el valor $\lambda = 4$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 2\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{10 \pm 2}{4} = \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

La matriz A tendrá inversa para todos los valores reales de λ excepto para $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$.

En el caso de que $\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -6 & -14 \\ 8 & -4 & -12 \\ -11 & 7 & 17 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} & 2 & -\dfrac{11}{4} \\ -\dfrac{3}{2} & -1 & \dfrac{7}{4} \\ -\dfrac{7}{2} & -3 & \dfrac{17}{4} \end{pmatrix}$

2.59. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix}$:

Calcula los valores de *t* para los cuales existe la matriz inversa de *A*.

Calcula dicha matriz inversa para *t* = 2.

Resuelve la ecuación matricial *AX* = *B* siendo *A* la matriz correspondiente al valor *t* = 2 y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

a) $|A| = 2 - t - t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$

La matriz A tendrá inversa para todos los valores de t excepto para 1 y −2.

b) $A^{-1} = -\dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$

c) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.60. (PAU) ¿Para qué valores de λ tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & 1\\ 2 & -1 & 2\\ \lambda & -3 & 2\end{pmatrix}$?

Calcula la expresión de dicha matriz inversa para $\lambda = 0$.

$|A| = 2\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{3}{2}$ y $\lambda = -2$

Existe inversa de *A* para todos los valores reales de λ excepto para $\lambda = \dfrac{3}{2}$ *y* $\lambda = -2$.

Para λ =0:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2.61. Los elementos de la matriz cuadrada de orden 4 $A=(a_{ij})$ son: $a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } i=j=1\\ 0 \text{ si } i=j\neq 1\\ -1 \text{ si } i\neq j\end{cases}$

a) Escribe la matriz.

b) Calcula el valor del determinante de la matriz.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

b) $|A| = \begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2+F_1\\ F_3=F_3+F_1\\ F_4=F_4+F_1}}{=} \begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -2 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -2\\ -2 & -2 & -1\end{vmatrix} = -5$

2.62. ¿Qué relación deben verificar los números *a*, *b* y *c* para que $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix} = 0$?

En los ejercicios resueltos del final de la unidad se ha obtenido el valor del determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Este producto es nulo si y solo sí al menos uno de los paréntesis es nulo. Por tanto, el determinante valdrá cero si al menos dos de los tres números *a*, *b* y *c* son iguales.

2.63. (TIC) Calcula el valor de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{16} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{16} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{64} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(4-3) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 12$$

2.64. Sabiendo que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{t} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{5}$**, calcula el valor de** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}+\mathbf{1} & \boldsymbol{y}+\mathbf{1} & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{u}+\mathbf{2} & \boldsymbol{v}+\mathbf{2} & \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{s}+\mathbf{3} & \boldsymbol{t}+\mathbf{3} & \boldsymbol{s}+\boldsymbol{t} \end{vmatrix}$**.**

Restando a los elementos de la tercera columna los de la primera y segunda, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & -2 \\ u+2 & v+2 & -4 \\ s+3 & t+3 & -6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & 1 \\ u+2 & v+2 & 2 \\ s+3 & t+3 & 3 \end{vmatrix}$$

Restando el valor de los elementos de la tercera columna a los de la primera y segunda:

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 2 \\ s & t & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 5 = -10$$

2.65. Calcula el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x}-\mathbf{1} & \boldsymbol{x}-\mathbf{2} & \boldsymbol{x}-\mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{16} \end{vmatrix}$

Restando a la segunda fila la primera multiplicada por *x* y a la tercera fila la primera, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 0$$, ya que las filas segunda y tercera son proporcionales.

2.66. (TIC) Calcula el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 160$$

2.67. (TIC) Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 80x - 96$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} x+6 & 1 & 2 & 3 \\ x+6 & x & 1 & 2 \\ x+6 & 3 & x & 1 \\ x+6 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = (x+6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1\\F_3=F_3-F_1\\F_4=F_4-F_1}}{=} (x+6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & x-2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+6)\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 2 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} \underset{C_3=C_3-C_2}{=} (x+6)\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 2 & x-2 & -x \\ 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1-C_2}{=} (x+6)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 4-x & x-2 & -x \\ 0 & 1 & x-4 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+6)\left[x(x-2)(x-4) + x^2 + (4-x)(x-4)\right] = x^4 - 20x^2 + 80x - 96$$

Por tanto:

$$x^4 - 20x^2 + 80x - 96 = 80x - 96 \Rightarrow x^4 - 20x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 20) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{20}, x = -\sqrt{20}$$

2.68. a) Comprueba que los números 297, 351 y 405 son todos múltiplos de 27.

b) Demuestra, sin necesidad de desarrollarlo, que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **es múltiplo de 27.**

a) 297 = 27 · 11 351 = 27 · 13 405 = 27 · 15

b) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{C_3=C_3+10C_2+100C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 9 & 297 \\ 3 & 5 & 351 \\ 4 & 0 & 405 \end{vmatrix} = 27\begin{vmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 3 & 5 & 13 \\ 4 & 0 & 15 \end{vmatrix}$

Como todos los elementos de la última columna son múltiplos de 27, se podrá extraer este número como factor común, y, por tanto, el valor del determinante será múltiplo de 27.

2.69. Calcula el valor del determinante: $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -x & y & x & x \\ -x & -x & y & x \\ -x & -x & -x & y \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -x & y & x & x \\ -x & -x & y & x \\ -x & -x & -x & y \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2+F_1\\F_3=F_3+F_1\\F_4=F_4+F_1}}{=} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x+y & 2x & 2x \\ 0 & 0 & x+y & 2x \\ 0 & 0 & 0 & x+y \end{vmatrix} = x(x+y)^3$$

2.70. En un país hay tres comunidades autónomas *A*, *B* y *C*. La probabilidad de que un residente en *A* permanezca en *A* al año siguiente es de 0,90; la de que se vaya a *B*, de 0,06, y la de que se vaya a *C*, de 0,04. La probabilidad de que un residente en *B* permanezca en *B* es de 0,95; la de que se vaya a *A*, de 0,03, y la de que se vaya a *C*, de 0,02. Finalmente, la probabilidad de que un residente en *C* se quede en *C* es de 0,96; la de que se vaya a *A*, de 0,02, y la de que se vaya a *B*, de 0,02. Si las poblaciones en 2008 eran de 1,52, 2,56 y 5,48 millones de personas, respectivamente, ¿cuáles eran las de 2007?

La matriz de transición de la población de un año al siguiente es $T = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,06 & 0,04 \\ 0,03 & 0,95 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,96 \end{pmatrix}$

$P_{2008} = P_{2007} \cdot T \Rightarrow P_{2007} = P_{2008} \cdot T^{-1}$

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\left[\mathrm{Adj}(T)\right]^t = \frac{1}{0,818}\begin{pmatrix} 0,9116 & -0,0284 & -0,0184 \\ -0,0568 & 0,8632 & -0,0168 \\ -0,0184 & -0,0168 & 0,8532 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1,1144 & -0,0694 & -0,0450 \\ -0,0347 & 1,0553 & -0,0205 \\ -0,0225 & -0,0205 & 1,0430 \end{pmatrix}$$

$$P_{2007} = \begin{pmatrix} 1,52 & 2,56 & 5,48 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,1144 & -0,0694 & -0,0450 \\ -0,0347 & 1,0553 & -0,0205 \\ -0,0225 & -0,0205 & 1,0430 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,48 & 2,48 & 5,59 \end{pmatrix}$$

2.71. En una determinada localidad existen tres compañías *A*, *B* y *C* que ofrecen el servicio de telefonía móvil. La siguiente matriz representa las probabilidades que tiene un cliente de cada zona de permanecer en la misma compañía o cambiarse a otra el año que viene:

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}70 & 0{,}20 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix}$$

Para realizar una investigación de mercado se cuenta con los datos del número de clientes en 2008:

***A*: 12 500   *B*: 25 000   *C*: 18 000**

Calcula el número de clientes correspondientes a los años 2006 y 2007.

$$P_{2008} = P_{2007} \cdot T \Rightarrow P_{2007} = P_{2008} \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 12500 & 25000 & 18000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}70 & 0{,}20 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12500 & 25000 & 18000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}285 & -0{,}275 & -0{,}010 \\ -0{,}166 & 1{,}487 & -0{,}321 \\ -0{,}062 & -0{,}067 & 1{,}130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10798 & 32531 & 12171 \end{pmatrix}$$

$$P_{2007} = P_{2006} \cdot T \Rightarrow P_{2006} = P_{2007} \cdot T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10798 & 32531 & 12171 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}285 & -0{,}275 & -0{,}010 \\ -0{,}166 & 1{,}487 & -0{,}321 \\ -0{,}062 & -0{,}067 & 1{,}130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7725 & 44590 & 3185 \end{pmatrix}$$

PROFUNDIZACIÓN

2.72. Demuestra la siguiente igualdad.

$$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+x)^3$$

$$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} \underset{F_1=F_1+F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} \underset{C_3=C_3-C_1}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2y & y-x-z & 0 \\ 2z & 2z & -z-x-y \end{vmatrix} =$$

$$= -(x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & y-x-z \end{vmatrix} = -(x+y+z)^2 \left[y-x-z-2y \right] = (x+y+x)^3$$

2.73. Demuestra la siguiente igualdad.

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz} \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} xyz & x^2 & x^3 \\ xyz & y^2 & y^3 \\ xyz & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz} \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

2.74. Calcula el valor del siguiente determinante de orden *n*.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & a & a & \dots & a \\ a & -2 & a & \dots & a \\ a & a & -2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & a & a & \dots & a \\ a & -2 & a & \dots & a \\ a & a & -2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & -2 \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1+C_2+C_3+\dots+C_n}{=} \begin{vmatrix} (n-1)a-2 & a & a & \dots & a \\ (n-1)a-2 & -2 & a & \dots & a \\ (n-1)a-2 & a & -2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)a-2 & a & a & \dots & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[(n-1)a-2\right] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & -2 & a & \dots & a \\ 1 & a & -2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & a & \dots & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ \dots \\ F_n=F_n-F_1}}{=} \left[(n-1)a-2\right] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & -2-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2-a \end{vmatrix}$$

$$= \left[(n-1)a-2\right] (-2-a)^{n-1}$$

2.75. Estudia, según los valores de los parámetros *a* y *b*, el rango de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a+b & a & a \\ 3a+b & a+b & a \\ 3a+b & a & a+b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a+b & a \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (3a+b)b^2$$

$$|A| = (3a+b)b^2 \text{ , } \begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (2a+b)\,b$$

Entonces:

$$b=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow \text{rg}(A)=0 \\ a\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=1 \end{cases}$$

$$b\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} b=-3a \Rightarrow \text{rg}(A)=2 \\ b\neq -3a \Rightarrow \text{rg}\ (A)=3 \end{cases}$$

2.76. Estudia, según los valores de *x* e *y*, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1+x \\ 2 & 1 & 2 \\ 2x & y & x+y \end{pmatrix}$**.**

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & x & 1+x \\ 2 & 1 & 2 \\ 2x & y & x+y \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & x & 1+x \\ 1 & 1 & 2 \\ x & y & x+y \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

Si $x = y = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$

En cualquier otro caso, rg(A) = 2

2.77. Estudia, según los valores de *a*, el rango de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ -3 & a+2 & 2 \\ -5 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ -3 & a+2 & 2 \\ -5 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \underset{F_2=F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ -1-a & a+1 & 0 \\ -5 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 2 \\ 0 & a+1 & 0 \\ -4 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)\begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ -4 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)\left(a^2+7\right)$$

Si $a = -1 \Rightarrow$ rg(A) = rg $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = 2

Si $a \neq -1 \Rightarrow$ rg(A) = 3

2.78. Calcula todas las matrices *X* tales que:

$$X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-2b & 0 \\ 2c-2d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2-2ab & 2ab-2b^2 \\ 2ca-2da & 2cb-2bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a^2-2ab & 2ab-2b^2 \\ 2ca-2da & 2cb-2bd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2-ab=1 \\ ab-b^2=0 \\ ca-da=1 \\ cb-bd=0 \end{cases}$$

$$ab-b^2=0 \Rightarrow b(a-b)=0 \begin{cases} b=0 \quad a=1 \quad c=1+d \\ b=0 \quad a=-1 \quad d=1+c \\ a=b \Rightarrow \begin{cases} cb-db=1 \\ cb-db=0 \end{cases} \Rightarrow \text{imposible} \end{cases}$$

Las matrices X son de la forma $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+d & d \end{pmatrix}$ o $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1+c \end{pmatrix}$.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

2.1. Los valores de *a* que anulan el valor del determinante $\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4a \end{vmatrix}$ **son:**

A) $a = 2$

B) $a = 2$ **y** $a = -\dfrac{9}{2}$

C) $a = 2$ **y** $a = -3$

D) Para cualquier valor real de *a*, el determinante es nulo.

E) No existe ningún valor de *a* que anule el determinante.

La respuesta correcta es B) $a = 2$ y $a = -\dfrac{9}{2}$, ya que $|\Delta| = -4a^2 - 10a + 36 = 0$

2.2. Dado el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, su valor se puede calcular mediante el desarrollo:

A) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

B) $\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

C) $\Delta = -3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

D) $\Delta = 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

E) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

La respuesta correcta es E. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.

2.3. Se sabe que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$, el valor de $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix}$ es:

A) 10 **B)** −10 **C)** $\frac{5}{2}$ **D)** $-\frac{5}{2}$ **E)** 0

La respuesta correcta es A: 10, los cambios para tener el segundo determinante en función del primero son: $F_1 : F_1 + F_2,\ F_3 : -2F_3 + F_2$

2.4. El valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 45 & 50 & 80 \\ 2025 & 2500 & 6400 \end{vmatrix}$ es:

A) 5125 **B)** −5000 **C)** 5250 **D)**0 **E)** 175

La respuesta correcta es C: 5250.

2.5. Los adjuntos A_{32} y A_{13} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ -a & 2 & a^2 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix}$ se anulan a la vez en el caso de que:

A) $a = 1$

B) $a = -1$

C) $a = 0$

D) Se anulan en cualquier caso.

E) No existe ningún valor de a que anule los dos adjuntos a la vez.

La respuesta correcta es B: $a = -1$.

2.6. El valor de la diferencia de determinantes $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ a & 2 & -3 \\ -2 & a & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -a & -1 \end{vmatrix}$ **vale:**

A) $-18 - 15a$

B) $-18 + 15a$

C) $18 - 15a$

D) $-18a + 15a$

E) Ninguna de las respuestas es cierta.

La respuesta correcta es C) $18 - 15a$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

2.7. En relación con el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 & 2 \\ m^2 & 2 & -3 & 1 \\ m-1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

A) Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ **, entonces rg(*A*) = 2**

B) Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ **, entonces rg(*A*) ≥ 2**

C) Existe algún valor de *m* para el cual rg(*A*) > 3.

D) El valor del rango de *A* sólo puede ser 2 ó 3.

E) El valor del rango de *A* es 3 en todos los casos excepto para *m* = 0, *m* = 4 o *m* = 1, que vale 2.

Las respuestas correctas son B) Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces rg(A) ≥ 2 y D) El valor del rango de A sólo puede ser 2 ó 3.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

2.8. La ecuación matricial *AXA* = *B*, donde *A* y *B* son matrices cuadradas de orden 3 y la matriz *X* es la matriz incógnita.

a) Tiene solución, es decir, se puede calcular *X*.

b) La matriz *A* es regular, es decir, $\det(A) \neq 0$ **.**

A) a es equivalente a b.

B) a implica b, pero b no implica a.

C) b implica a, pero a no implica b.

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Ninguna de las dos afirmaciones se puede verificar.

La respuesta correcta es C) b implica a, pero a no implica b.

Señala el dato innecesario para contestar:

2.9. Para calcular el determinante de *A* se dan los siguientes datos:

a) La matriz *A* es cuadrada de orden 4.

b) Si $i = j$, el valor de a_{ij} es nulo.

c) Si $i \neq j$, el valor de a_{ij} es $-2i + j$.

d) Los adjuntos de los elementos de la primera fila valen −12, −16, 36 y 62, respectivamente.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es D) Puede eliminarse el dato d, porque aunque sepamos los adjuntos de los elementos de la primera fila necesitamos saber los valores de los elementos a_{ij} para calcular el determinante de *A.*

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

2.10. Se quiere obtener el valor del rango de la matriz $A = (a_{ij})$, de dimensión 3×4. Para ello, se sabe que $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ y $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$, y se dan, como dato, los valores de:

a) Todos los menores de orden dos que contienen a Δ_1.

b) Todos los menores de orden tres que contienen a Δ_2.

A) Las informaciones a y b son suficientes por sí solas para obtener el rango.

B) La información a es suficiente por sí sola, pero la b no.

C) La información b es suficiente por sí sola, pero la a no.

D) Son necesarias las dos informaciones juntas.

E) Hacen falta más datos.

La respuesta correcta es C) La información b es suficiente por sí sola, pero la a no, ya que se debería tener información acerca de los menores de orden tres que contienen a Δ_1.